

ANTWOORDEN TENTAMEN WI1607, 20 JUNI, 2011

Opgave 1a. Kies $x, y \in A$ en neem aan dat $h(x) = h(y)$. Te bewijzen: $x = y$.

Wegens de definitie van h volgt $g(f(x)) = g(f(y))$. Uit de injectiviteit van g volgt dat $f(x) = f(y)$. Uit de injectiviteit van f volgt $x = y$.

Opgave 1b. Kies $c \in C$ willeurig. Te bewijzen: er bestaat een $a \in A$ zó dat $h(a) = c$.

Wegens de surjectiviteit van g kunnen we een $b \in A$ vinden zó dat $g(b) = c$. Vervolgens gebruiken we de surjectiviteit van f om een $a \in A$ te vinden zó dat $f(a) = b$. Er volgt dat $h(a) = g(f(a)) = g(b) = c$.

Opgave 2. Zie dictaat.

Opgave 3a. $\sim$ is reflexief. Zij $a \in \mathbb{Z}$ willekeurig. Te bewijzen $a \sim a$.

Dit is waar, want $a \cdot 1 = a$.

Opgave 3b. $\sim$ is niet symmetrisch. Een tegenvoorbeeld is: $1 \sim 2$, want $1 \cdot 2 = 2$. Echter niet geldt $2 \sim 1$, want $2x = 1$ heeft geen oplossing in $\mathbb{Z}$.

Inderdaad¹ voor alle $x \leq 0$ geldt $2x \leq 0$. Dus $2x \neq 1$. Als $x \geq 1$ dan geldt $2x \geq 2$ dus ook in dit geval $2x \neq 1$.

Opgave 3c. $\sim$ is transitief. Kies $a, b, c \in \mathbb{Z}$ zó dat $a \sim b$ en $b \sim c$. Te bewijzen $a \sim c$.

Uit $a \sim b$ en $b \sim c$ volgt dat er $x, y \in \mathbb{Z}$ zijn zó dat $ax = b$ en $by = c$. Er volgt $a(xy) = (ax)y = by = c$. Dus $a \sim c$.

Opgave 4. Zie dictaat.

Opgave 5. De ongelijkheid van Bernoulli zegt dat voor alle $b > -1$ en $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ geldt dat

$$1 + nb \leq (1 + b)^n.$$

Definieer $x_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n$. Kies $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ willekeurig en pas de ongelijkheid van Bernoulli toe met $b = -1/n^2$. Dit geeft $1 - \frac{1}{n} \leq x_n$. Aan de andere kant geldt $x_n \leq 1$ voor alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Aangezien $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1$, volgt uit de insluitstelling dat $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$.

Opgave 6a. Zie dictaat.

Opgave 6b. Merk op dat voor alle $k \geq 1$ geldt dat $|3^{-k} \sin(k^2)| \leq 3^{-k} = \left(\frac{1}{3}\right)^k$. De reeks $\left(\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{3}\right)^k\right)_{n \in \mathbb{N}}$ is convergent, want het is een meetkundige reeks met $\left|\frac{1}{3}\right| < 1$. Uit het majoranten kenmerk volgt dat $\left(\sum_{k=1}^n 3^{-k} \sin(k^2)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ ook convergent is.

Opgave 7a. Te bewijzen: er bestaat een $\varepsilon > 0$ zó dat voor alle $\delta > 0$ er bestaan $x, y \in (0, \infty)$ met $|x - y| < \delta$ en $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$.

Kies $\varepsilon = 1$. Kies $\delta > 0$ willekeurig. Er zijn 2 mogelijkheden: (i) $\delta \in (0, 1)$ of (ii) $\delta \geq 1$.

In geval (i) kies $x = 1$ en $y = 1/2$. Dan geldt $|x - y| = 1/2 < \delta$ en $|f(x) - f(y)| = |1 - 2| = 1 \geq \varepsilon$.

In geval (ii) kies $x = \delta$ en $y = \delta/2$. Dan geldt $|x - y| = \delta/2 < \delta$ en

$$|f(x) - f(y)| = \left|\frac{1}{\delta} - \frac{2}{\delta}\right| = \frac{1}{\delta} > 1 \geq \varepsilon.$$

¹Dit stukje mag worden weggelaten, en kan ook op andere manieren worden bewezen

Opgave 7b. Aangezien f en g begrensd zijn kunnen we $M_1, M_2 > 0$ vinden zó dat voor alle $x \in A$ geldt dat $|f(x)| \leq M_1$ en $|g(x)| \leq M_2$.

Kies $\varepsilon > 0$ willekeurig. Aangezien f uniform continu is kunnen we een $\delta_1 > 0$ vinden zó dat voor alle $x, y \in A$ met $|x - y| < \delta_1$ geldt dat $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2M_2}$. Wegens de uniforme continuïteit van g vinden we een $\delta_2 > 0$ zó dat voor alle $x, y \in A$ met $|x - y| < \delta_2$ geldt dat $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2M_1}$.

Definieer $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Kies $x, y \in A$ met $|x - y| < \delta$. Uit de driehoeksongelijkheid en bovenstaande volgt dat

$$\begin{aligned} |h(x) - h(y)| &= |f(x)g(x) - f(y)g(y)| \\ &\leq |f(x)g(x) - f(x)g(y)| + |f(x)g(y) - f(y)g(y)| \\ &= |f(x)| |g(x) - g(y)| + |g(y)| |f(x) - f(y)| \\ &< M_1 \frac{\varepsilon}{2M_1} + M_2 \frac{\varepsilon}{2M_2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Opgave 8. Zie dictaat.

Opgave 9a. Kies $\varepsilon > 0$ willekeurig. Kies een $N \in \mathbb{N}$ met $N > \frac{1}{\varepsilon}$. Kies $x \in [-1, 1]$ willekeurig. Voor alle $n \geq N$ geldt dat

$$|f_n(x)| = \frac{|x|}{n} \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

Opgave 9b. Neem aan dat $f_n \xrightarrow{u} f$. Kies $\varepsilon > 0$ willekeurig. Kies $N \in \mathbb{N}$ zó dat voor alle $x \in [a, b]$ en voor alle $n \geq N$ geldt $|f_n(x) - f_n(y)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$. Uit de eigenschappen van de Riemann integraal volgt dat voor alle $n \geq N$,

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b f_n(x) dx \right| &= \left| \int_a^b f(x) - f_n(x) dx \right| \quad (\text{lineariteit}) \\ &\leq \int_a^b |f(x) - f_n(x)| dx \quad (\text{driehoeksongelijkheid}) \\ &\leq \int_a^b \frac{\varepsilon}{2(b-a)} dx \\ &= \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \end{aligned}$$