

- Geen rekenmachine/telefoon toegestaan
- Geen grafieken/plaatjes/Venn-diagrammen in de antwoorden toegestaan.
- Geef aan welke stellingen uit het dictaat je gebruikt.

- (1) 1. a. Een functie $f : A \rightarrow B$ is injectief als
- (1) b. Laat $f : A \rightarrow B$ en $g : B \rightarrow C$ twee functies zijn. Bewijs of weerleg: als $g \circ f$ injectief is, dan is f injectief.
- (1) c. Geef een voorbeeld van *eindige* verzamelingen B en C en een functie $g : B \rightarrow C$ die niet surjectief is.

2. Laat $A, B \subseteq \mathbb{R}$ niet-lege verzamelingen zijn en neem aan dat voor elke $a \in A$ en voor elke $b \in B$ geldt dat $a < b$.

- (2) a. Toon aan dat $\sup A \leq \inf B$.
- (1) b. Geef een voorbeeld van een A en B zó dat $\sup A = \inf B$.

- (2) 3. a. Laat $(a_n)_{n \geq 0}$ een convergente reële rij zijn met $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. Toon aan dat $(a_n)_{n \geq 0}$ begrensd is.

- (2) b. Laat $(a_n)_{n \geq 0}$ en $(b_n)_{n \geq 0}$ twee convergente reële rijen zijn met $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ en $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$. Toon aan dat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = ab.$$

- (1) 4. a. Zij $A \subseteq \mathbb{R}$. Een functie $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ is uniform continu als
- (2) b. Definieer $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ door $f(x) = |x - 2|$. Toon met behulp van de definitie van uniforme continuïteit aan dat f uniform continu is.

- (3) 5. Zij $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Toon met behulp van volledige inductie aan dat de functie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gedefinieerd door $f(x) = x^n$ differentieerbaar is met afgeleide $f'(x) = nx^{n-1}$.
Hint: Gebruik voor $n = 1$ de definitie van de afgeleide.

- (3) 6. Formuleer en bewijs de stelling van Rolle.

Zie ook de volgende bladzijde.

- (1) 7. a. Geef de definitie van de bovenintegraal van een begrensde functie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ en leg hierbij ook uit wat een bovensom is.

Definieer de functies $g, h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ door $g(x) = e^{x^2}$ en

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ 1 & \text{als } x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

- (1) b. Leg uit waarom de functie g wel/niet Riemann integreerbaar is.
(1) c. Leg uit waarom de functie h wel/niet Riemann integreerbaar is.

- (1) 8. a. Zij $A \subseteq \mathbb{R}$ en voor elke $n \in \mathbb{N}$ zij $f_n : A \rightarrow \mathbb{R}$ een functie. Laat ook $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ een functie zijn. We zeggen dat de functierij $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uniform naar f convergeert als

Beschouw de functierij $(f_n)_{n \geq 0}$ met $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven door

$$f_n(x) = \frac{n|x|}{1 + n^2 x^2}.$$

- (1) b. Bewijs of weerleg: er is een $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zó dat $f_n \xrightarrow{p} f$.
(1) c. Bewijs of weerleg: er is een $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zó dat $f_n \xrightarrow{u} f$.

De waardering voor elke vraag staat in de kantlijn; het tentamencijfer wordt berekend volgens de formule

$$\text{Tentamencijfer} = \frac{\text{Totaal}}{x} + 1, \quad \text{met } x = 25/9.$$

en afgerond op halve cijfers.

EINDE