

Uitwerking tentamen 20-01-2011

Vraag 1

1a zie dictaat.

1b Neem aan dat $g \circ f$ injectief is. We tonen aan dat f injectief is. Kies $x, y \in A$ met $f(x) = f(y)$. Te bewijzen $x = y$. Aangezien $f(x) = f(y)$ geldt ook $g(f(x)) = g(f(y))$. Met de injectiviteit van $g \circ f$ volgt $x = y$.

1c Neem $B = C = \{0, 1\}$ en definieer $g : B \rightarrow C$ als $g(0) = 0$ en $g(1) = 0$. Dan is g niet surjectief want er is geen $b \in B$ zó dat $g(b) = 1$.

Vraag 2

2a Kies $b \in B$ vast en willekeurig. Voor elke $a \in A$ geldt $a < b$. Hieruit volgt dat b een bovengrens is voor A . In het bijzonder is A naar boven begrensd, en dus heeft A een kleinste bovengrens. Uit de definitie van het supremum volgt dat $\sup A \leq b$. Aangezien $b \in B$ willekeurig is, vinden we dat voor elke $b \in B$ geldt dat $\sup A \leq b$. In het bijzonder is B naar beneden begrensd. Uit de definitie van het infimum volgt dat $\sup A \leq \inf B$.

2b Neem bijvoorbeeld $A = (0, 1)$ en $B = (1, 4)$. Dan geldt $\sup A = 1$ en $\inf B = 1$.

Vraag 3

3a Zie dictaat.

3b Wegens opgave 4a geldt dat $(a_n)_{n \geq 0}$ een begrensde rij is. Zij $M > 0$ zó dat voor alle $n \geq 0$ geldt $|a_n| \leq M$.

Kies $\varepsilon > 0$ willekeurig. Kies $N_1 \in \mathbb{N}$ zó dat voor alle $n \geq N_1$ geldt $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{|b|+1}$. Kies $N_2 \in \mathbb{N}$ zó dat voor alle $n \geq N_2$ geldt $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2M}$.

Neem $N = \max\{N_1, N_2\}$. Er volgt dat voor alle $n \geq N$ geldt dat

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &\leq |a_n b_n - a_n b| + |a_n b - ab| && \text{(Driehoeksongelijkheid)} \\ &= |a_n| |b_n - b| + |b| |a_n - a| < M \frac{\varepsilon}{2M} + |b| \frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{|b|+1} \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Vraag 4

4a ... voor elke $\varepsilon > 0$ er een $\delta > 0$ bestaat zó dat voor alle $x, y \in A$ geldt

$$|x - y| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

4b Kies $\varepsilon > 0$ willekeurig. Neem $\delta = \varepsilon$. Kies $x, y \in \mathbb{R}$ met $|x - y| < \delta$ willekeurig. Er volgt

$$\begin{aligned} \left| |x - 2| - |y - 2| \right| &\leq \left| x - 2 - (y - 2) \right| && \text{(Omgekeerde driehoeksongelijkheid)} \\ &= |x - y| < \delta = \varepsilon. \end{aligned}$$

Vraag 5

Voor $n = 1$ is de bewering waar: Als $f(x) = x$ en $x \in \mathbb{R}$ willekeurig dan geldt

$$f'(x) = \lim_{t \rightarrow x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = \lim_{t \rightarrow x} \frac{t - x}{t - x} = 1 \quad \text{en} \quad 1 \cdot x^{1-1} = 1$$

(I.V.) Neem aan dat voor een zekere $n \geq 1$ geldt dat $f(x) = x^n$ differentieerbaar is op $\mathbb{R}$, met afgeleide $f'(x) = nx^{n-1}$.

Laat $f(x) = x^{n+1}$. Merk op dat $f(x) = x^n \cdot x$. De functie $f_1(x) = x^n$ is volgens de (I.V.) differentieerbaar op $\mathbb{R}$ met afgeleide $f'_1(x) = nx^{n-1}$, en we hebben al bewezen dat $f_2(x) = x$ ook differentieerbaar is op $\mathbb{R}$ met afgeleide $f'_2(x) = 1$. Volgens de rekenregels voor de afgeleide (productregel) is dan $f = f_1 \cdot f_2$ ook differentieerbaar op $\mathbb{R}$ met afgeleide

$$f'(x) = nx^{n-1} \cdot x + x^n \cdot 1 = nx^n + x^n = (n+1)x^n.$$

Vraag 6 Zie dictaat.

Vraag 7

7a De bovenintegraal van f over $[a, b]$ is gedefinieerd door

$$\overline{\int_a^b} f(x) dx = \inf\{U(P, f) : P \text{ is een partitie van } [a, b]\}.$$

Hierbij is $U(P, f)$ de bovensom van f bij een partitie $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ gedefinieerd als

$$U(P, f) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta_i, \quad \text{met } M_i = \sup\{f(x) : x_{i-1} \leq x \leq x_i\} \text{ en } \Delta_i = x_i - x_{i-1}.$$

7b We tonen aan dat g Riemann integreerbaar is. Merk op de functie $x \mapsto e^x$ en $x \mapsto x^2$ zijn continu op $\mathbb{R}$. Dus ook de samenstelling van beide is continu op $\mathbb{R}$. Hieruit volgt dat g continu is. Aangzien in het dictaat bewezen is dat elke continue functie Riemann integreerbaar is volgt het gevraagde.

7c h is niet Riemann integreerbaar. Dit laten we zien door te bewijzen dat

$$\overline{\int_a^b} f(x) dx = 1 \quad \text{en} \quad \underline{\int_a^b} f(x) dx = 0.$$

Zij $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ een willekeurige partitie. Er geldt $U(P, h) = 1$ en $L(P, h) = 0$. Hieruit volgt het gevraagde.¹

Vraag 8

8a We zeggen dat de functierij $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uniform naar f convergeert als voor elke $\varepsilon > 0$ er een $N \in \mathbb{N}$ bestaat zó dat voor alle $n \geq N$ voor alle $x \in A$ geldt $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

8b Er geldt: $f_n(0) = 0$ voor alle $n \in \mathbb{N}$, dus $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(0) = 0$. Als $x \neq 0$ dan geldt

$$0 \leq |f_n(x)| = \frac{n|x|}{1+n^2x^2} \leq \frac{n|x|}{n^2x^2} = \frac{1}{n|x|} \quad (*)$$

Hieruit kun je met behulp van de insluitstelling zien dat $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$. Het kan ook direct met de definitie van convergentie van rijen. Zij $\varepsilon > 0$ willekeurig. Kies $N \in \mathbb{N}$ zó dat $N > \frac{1}{\varepsilon|x|}$. Er volgt met (*) dat voor alle $n \geq N$ geldt:

$$|f_n(x) - 0| = |f_n(x)| \leq \frac{1}{n|x|} \leq \frac{1}{N|x|} < \varepsilon.$$

Conclusie $f_n \xrightarrow{p} f$ waarbij f de nulfunctie is.

8c Dit is niet waar. We bewijzen dit uit het ongerijmde. Stel er is een functie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ met $f_n \xrightarrow{u} f$. Dan volgt uit een stelling dat $f_n \xrightarrow{p} f$. Uit de uniciteit van limieten van rijen volgt dat f de functie uit 8b moet zijn. Bewering: f_n convergeert niet uniform naar de nulfunctie. Inderdaad, neem $\varepsilon = 1/2$. Neem $N \in \mathbb{N}$ willekeurig. Kies $x = 1/n$, dan volgt

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{1+1} = 1/2 \geq \varepsilon.$$

Conclusie er is geen functie f waarvoor geldt dat $f_n \xrightarrow{u} f$.

¹Om bijvoorbeeld te zien dat $U(P, h) = 1$ laten we eerst zien dat elke $M_i = 1$, waarbij M_i is zoals in 8a. Inderdaad, merk eerst op dat $M_i \leq \sup_{x \in [0,1]} h(x) = 1$. Omdat er tussen ieder 2 reële getallen $x_{i-1} < x_i$ een rationaal getal is, kunnen we $q_i \in (x_i, x_{i-1}) \cap \mathbb{Q}$ vinden. Hieruit zien we dat $M_i \geq f(q_i) = 1$. Er volgt dat

$$U(P, h) = \sum_{i=1}^n \Delta_i M_i = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = 1.$$