

1. Beschouw $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven door $f(x) = \frac{2-4x}{x}$.

- (1) a. Bewijs dat f injectief is.
- (2) b. Vind de beeldverzameling $B = f[[1, \infty))$ en bewijs dat $f : [1, \infty) \rightarrow B$ bijectief is.

(3) 2. Bewijs de Ongelijkheid van Bernoulli: Voor alle reële $b \geq -1$ en alle $n \in \mathbb{N}$ geldt $(1+b)^n \geq 1+nb$.

(3) 3. Vind het supremum en het maximum van

$$V = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{1}{2x} > 1 \right\}$$

of laat zien dat ze niet bestaan. Geef alle benodigde bewijzen.

(1) 4. a. Laat $a \in \mathbb{R}$ en $(x_n)_{n \geq 0}$ een rij in $\mathbb{R}$ zijn. Geef de definitie van $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

(2) b. Toon aan: uit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ volgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = |a|.$$

(1) c. Bewijs of weerleg: uit $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = |a|$ volgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$$

5. Een functie heet Lipschitz continu als een $K \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ bestaat zodanig dat

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|.$$

(1) a. Geef de definitie van uniforme continuïteit.

(2) b. Bewijs of weerleg: een Lipschitz continue functie is uniform continu.

(1) 6. a. Geef de definitie van een Cauchy-rij in $\mathbb{R}$.

(2) b. Bewijs dat iedere Cauchy-rij in $\mathbb{R}$ begrensd is.

(2) 7. Formuleer de Middelwaardestelling en de Middelwaardeongelijkheid.

Zie ook de volgende bladzijde.

- (2) 8. a. Geef de definitie van de Riemann-integraal.
- (1) b. Laat $a, b \in \mathbb{R}$ zijn. Bewijs met behulp van deze definitie dat elke constante functie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integreerbaar is.

9. Beschouw de functierij $(f_n)_{n \geq 0}$ met $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven door

$$f_n(x) = |\sin(x)|^n.$$

- (2) a. Bewijs of weerleg: er is een $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zó dat de functierij $\{f_n\}_{n \geq 0}$ puntsgewijs naar f convergeert.
- (1) b. Bewijs of weerleg: er is een $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zó dat de functierij $\{f_n\}_{n \geq 0}$ uniform naar f convergeert.

De waardering voor elke vraag staat in de kantlijn; het tentamencijfer wordt berekend volgens de formule

$$\text{Tentamencijfer} = \frac{\text{Totaal} + 3}{3}$$

en afgerond op halve cijfers.

EINDE