

1. Beschouw $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven door $f(x) = \frac{2-4x}{x}$.
- (1) a. Bewijs dat f injectief is.
- (2) b. Vind de beeldverzameling $B = f[[1, \infty)]$ en bewijs dat $f : [1, \infty) \rightarrow B$ bijectief is.
- (3) 2. Bewijs de Ongelijkheid van Bernoulli: Voor alle reële $b \geq -1$ en alle $n \in \mathbb{N}$ geldt $(1+b)^n \geq 1+nb$.
- (1) 3. a. Laat $a \in \mathbb{R}$ en $(x_n)_{n \geq 0}$ een rij in $\mathbb{R}$ zijn. Geef de definitie van $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.
- (2) b. Toon aan: uit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ volgt
- $$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = |a|.$$
- (1) c. Bewijs of weerleg: uit $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = |a|$ volgt
- $$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$$
4. Een functie heet Lipschitz continu als een $K \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ bestaat zodanig dat
- $$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|.$$
- (1) a. Geef de definitie van uniforme continuïteit.
- (2) b. Bewijs of weerleg: een Lipschitz continue functie is uniform continu.
- (2) 5. Formuleer de Middelwaardestelling en de Middelwaardeongelijkheid.
6. Beschouw de functierij $(f_n)_{n \geq 0}$ met $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven door
- $$f_n(x) = |\sin(x)|^n.$$
- (2) a. Bewijs of weerleg: er is een $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zó dat de functierij $\{f_n\}_{n \geq 0}$ puntsgewijs naar f convergeert.
- (1) b. Bewijs of weerleg: er is een $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zó dat de functierij $\{f_n\}_{n \geq 0}$ uniform naar f convergeert.

De waardering voor elke vraag staat in de kantlijn; het tentamencijfer wordt berekend volgens de formule

$$\text{Tentamencijfer} = \frac{60\% \text{ totaal} + 20\% \text{ toetscijfer} + 20\% \text{ huiswerkcijfer} + 2}{2}$$

en afgerond op halve cijfers.

EINDE