

- Geen rekenmachine/telefoon toegestaan
 - Geen grafieken/plaatjes/Venn-diagrammen in de antwoorden toegestaan.
-

- (1) 1. a. Laat A en B verzamelingen zijn. Vul de volgende definitie aan: Een functie $f : A \rightarrow B$ is *surjectief* als
- (2) b. Geef een bijectie $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ en toon met behulp van de definitie aan dat uw functie f een bijectie is.

- (3) 2. Bewijs met behulp van volledige inductie dat voor alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ geldt dat $\sum_{j=1}^n (2j - 1) = n^2$.

- (3) 3. Bewijs met behulp van de basiseigenschappen (R0)–(R8) de volgende uitspraak:
Als $a \neq 0$ en $b \neq 0$, dan is $a \cdot b \neq 0$.
Geef bij elke stap aan welk axioma u gebruikt. *Tip*: De axioma's staan op de achterzijde.

- (3) 4. Zij A een verzameling en $B \subseteq \mathbb{R}$ met B naar boven begrensd. Gegeven zijn functies $f : A \rightarrow B$ en $g : A \rightarrow B$. Toon aan dat

$$\sup \{f(a) + g(a) : a \in A\} \leq \sup \{f(a) : a \in A\} + \sup \{g(a) : a \in A\}.$$

- (3) 5. Toon aan dat: als $x \in \mathbb{R}$ en $|x| \leq 1$, dan geldt $\left| x^5 + \frac{x^3}{x^2 + 1} + \frac{x}{2} \right| \leq \frac{5}{2}$.

- (1) 6. a. Vul de volgende definitie aan: Een reële rij $(a_n)_{n \geq 0}$ heet *convergent* wanneer
- (2) b. Formuleer en bewijs de insluitstelling voor convergentie van rijen.

De waardering voor elke vraag staat in de kantlijn; het cijfer wordt berekend volgens de formule

$$\text{Cijfer} = \frac{\text{Totaal} + 2}{2}.$$

EINDE

Hieronder een deel van de axioma's voor $\mathbb{R}$, met optelling en vermenigvuldiging. De gegevens zijn:

- (a) een verzameling $\mathbb{R}$;
- (b) twee verschillende elementen 0 en 1 in $\mathbb{R}$;
- (c) een afbeelding $+: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$;
- (d) een afbeelding $\cdot: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$;
- (R0) de optelling is *commutatief*: voor alle $a, b \in \mathbb{R}$ geldt $a + b = b + a$;
- (R1) de optelling is *associatief*: voor alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ geldt $(a + b) + c = a + (b + c)$;
- (R2) 0 is *neutraal* voor de optelling, d.w.z., voor alle $a \in \mathbb{R}$ geldt $0 + a = a$;
- (R3) additieve inversen bestaan: voor iedere $a \in \mathbb{R}$ is er een $b \in \mathbb{R}$ met $a + b = 0$ (deze b is dan uniek, en wordt genoteerd als $-a$);
- (R4) de vermenigvuldiging is *commutatief*: voor alle $a, b \in \mathbb{R}$ geldt $ab = ba$;
- (R5) de vermenigvuldiging is *associatief*: voor alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ geldt $(ab)c = a(bc)$;
- (R6) 1 is *neutraal* voor de vermenigvuldiging, d.w.z., voor alle $a \in \mathbb{R}$ geldt $1 \cdot a = a$;
- (R7) multiplicatieve inversen bestaan: voor iedere $a \in \mathbb{R}$ met $a \neq 0$ is er een $b \in \mathbb{R}$ met $ab = 1$ (deze b is dan uniek, en wordt genoteerd als $1/a$ en ook a^{-1});
- (R8) de *distributieve* eigenschap geldt: voor alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ geldt $a(b + c) = ab + ac$;

Ten slotte vermelden we nog dat substitutie ook is toegestaan.

EINDE