

UITWERKING TOETS 2010/2011

Vraag 1 (Dit is een voorbeeld in het dictaat)

1a) Een functie $f : A \rightarrow B$ is surjectief als $\forall b \in B \exists a \in A$ zó dat $f(a) = b$. (1 punt)

1b) Er zijn heel veel mogelijke antwoorden. Bijvoorbeeld: definieer $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ door

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{als } n \text{ is even,} \\ -\frac{n+1}{2}, & \text{als } n \text{ is oneven.} \end{cases}$$

(1 punt)

We tonen aan dat f een bijectie is.

f is injectief - Kies $x, y \in \mathbb{N}$ zó dat $f(x) = f(y)$. We moeten aantonen dat $x = y$. Er zijn twee mogelijkheden (i) $f(x) < 0$, (ii) $f(x) \geq 0$. In geval (i) geldt ook dat $f(y) \geq 0$. Uit de definitie van f volgt dat x en y beide even zijn. Hieruit en uit $f(x) = f(y)$ volgt dus dat $\frac{x}{2} = \frac{y}{2}$. Dus $x = y$. In geval (ii) geldt ook $f(y) < 0$. Uit de definitie van f volgt dat x en y beide oneven zijn. Hieruit en uit $f(x) = f(y)$ volgt dus dat $-\frac{x+1}{2} = -\frac{y+1}{2}$. Dus $x = y$.

(1/2 punt)

f is surjectief. Kies een willekeurige $b \in \mathbb{Z}$. We zoeken een $a \in \mathbb{N}$ zó dat $f(a) = b$. Er zijn twee mogelijkheden. (i) $b \geq 0$, (ii) $b < 0$. (i) $b \geq 0$. Kies $a = 2b$. Dan geldt $a \in \mathbb{N}$ en a is even en dus $f(a) = \frac{a}{2} = \frac{2b}{2} = b$. (ii) $b < 0$. Kies $a = -2b - 1$. Dan geldt $a \in \mathbb{N}$ en a is oneven en dus $f(a) = -\frac{a+1}{2} = -\frac{-2b-1+1}{2} = b$.

(1/2 punt)

Vraag 2 (Dit is een opgave in het dictaat)

We bewijzen met volledige inductie dat voor alle $n \geq 1$ geldt dat $\sum_{j=1}^n (2j-1) = n^2$.

Stap 1. Voor $n = 1$ geldt $\sum_{j=1}^1 (2j-1) = 1$ en $1^2 = 1$. Dus de gelijkheid geldt voor $n = 1$.

(1 punt)

Stap 2. Stel dat voor een $n \in \mathbb{N}$ geldt dat $\sum_{j=1}^n (2j-1) = n^2$ (I.V.). We tonen aan

dat $\sum_{j=1}^{n+1} (2j-1) = (n+1)^2$. Wegens de inductie veronderstelling geldt dat

$$\sum_{j=1}^{n+1} (2j-1) = (2(n+1)-1) + \sum_{j=1}^n (2j-1) = 2n+1 + n^2 = (n+1)^2.$$

Uit stap 1 en stap 2 volgt dat voor alle $n \geq 1$ geldt dat $\sum_{j=1}^n (2j-1) = n^2$.

(2 punten)

Vraag 3 (Dit is een opgave in het dictaat)

We hebben het volgende lemma nodig:

Lemma Voor alle $x \in \mathbb{R}$ geldt dat $x0 = 0$.

Bewijs lemma: Er geldt

$$x0 + x0 \stackrel{(R8)}{=} x(0+0) \stackrel{(R2)}{=} x0 \quad (*).$$

Er volgt dat

(1 punt)

$$x0 \stackrel{(R2)}{=} x0 + 0 \stackrel{(R3)}{=} x0 + (x0 + -(x0)) \stackrel{(R1)}{=} (x0 + x0) + -(x0) \stackrel{(*)}{=} x0 + -(x0) \stackrel{(R3)}{=} 0. \square$$

Nu tonen we het gevraagde aan. Stel $a \neq 0$ en $b \neq 0$. Stel $ab = 0$. We leiden een tegenspraak af. Uit (R7) weten we dat a^{-1} bestaat en $a^{-1}a = 1$. Er volgt:

(2 punten)

$$b \stackrel{(R6)}{=} 1b \stackrel{R7}{=} (a^{-1}a)b \stackrel{(R5)}{=} a^{-1}(ab) \stackrel{aanname}{=} a^{-1}0 \stackrel{lemma}{=} 0.$$

Vraag 4 (Dezelfde opgave maar dan met infimum en $\geq$ was een inleveropgave)

Kies $x \in A$ willkeurig. Wegens de definitie van het supremum geldt dat

$$f(x) \leq \sup \{f(a) : a \in A\} \quad \text{en} \quad g(x) \leq \sup \{g(a) : a \in A\}.$$

Optellen van beide ongelijkheden geeft dat

$$f(x) + g(x) \leq \sup \{f(a) : a \in A\} + \sup \{g(a) : a \in A\}.$$

Aangezien $x \in A$ willkeurig was volgt hieruit dat

$$\sup \{f(x) + g(x) : x \in A\} \leq \sup \{f(a) : a \in A\} + \sup \{g(a) : a \in A\}.$$

Dit bewijst het gevraagde.

(3 punten)

Vraag 5 (Dit is een combinatie van de opgaven over de driehoeksongelijkheid)

Zij $x \in \mathbb{R}$ willkeurig. Uit de driehoeksongelijkheid (1 punt) en wegens $|ab| = |a||b|$ volgt dat

$$\left| x^5 + \frac{x^3}{x^2+1} + \frac{x}{2} \right| \leq |x^5| + \left| \frac{x^3}{x^2+1} \right| + \left| \frac{x}{2} \right| = |x|^5 + \frac{|x|^3}{|x^2+1|} + \frac{|x|}{2}.$$

Aangezien $0 \leq |x| \leq 1$ geldt ook $|x|^n \leq 1$ voor alle $n \in \mathbb{N}$ (1/2 punt). Dus

$$|x|^5 + \frac{|x|^3}{|x^2+1|} + \frac{|x|}{2} \leq 1 + \frac{1}{|x^2+1|} + \frac{1}{2}.$$

Wegens $x^2 \geq 0$ geldt $x^2 + 1 \geq 1$ en dus $|x^2 + 1| = x^2 + 1 \geq 1$. Er volgt $\frac{1}{|x^2+1|} \leq 1$ (1/2 punt) en dus vinden we

$$1 + \frac{1}{|x^2+1|} + \frac{1}{2} \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}.$$

Alles combineren geeft:

(3 punten)

$$\left| x^5 + \frac{x^3}{x^2+1} + \frac{x}{2} \right| \leq \frac{5}{2}.$$

Vraag 6 (Dit staat in het dictaat)

6a) Vul de volgende definitie aan: Een reële rij $(a_n)_{n \geq 0}$ heet *convergent* wanneer $\exists a \in \mathbb{R} \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}$ zó dat $\forall n \geq N$ geldt dat $|a_n - a| < \varepsilon$.

(1 punt)

6b) Formulering stelling (Zie dictaat)

(1 punt)

Bewijs stelling (Zie dictaat)

(1 punt)