

- (4) 1. a. Bewijs of weerleg: de functie $f : (-1, 1) \rightarrow (-1, 1)$ gegeven door $f(x) = x^2$ is een bijectie.
(5) b. Bewijs dat de verzameling $2\mathbb{N}$ van alle even natuurlijke getallen aftelbaar is.
- (9) 2. Bepaal het supremum, maximum, infimum en minimum in $\mathbb{R}$ van $V = (-\infty, \sqrt{2}] \cap \mathbb{Q}$ of laat zien dat ze niet bestaan; geef ook alle benodigde bewijzen.

- (9) 3. Bewijs met volledige inductie dat voor alle natuurlijke getallen $n \geq 1$ geldt:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

- (6) 4. a. Formuleer en bewijs de driehoeksongelijkheid.

- (3) b. Bewijs dat voor alle $x, y \in \mathbb{R}$ geldt

$$||x| - |y|| \leq |x - y|.$$

- (9) 5. Vind positieve reële getallen a, b en c zó dat $a^3 + 3b^3 + 9c^3$ minimaal is als $abc = 2$. Wat is het minimum?

- (9) 6. Bewijs dat iedere convergente rij in $\mathbb{R}$ een Cauchy-rij is.

7. Definieer $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ door

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{als } x \neq 0; \\ 1, & \text{als } x = 0. \end{cases}$$

- (6) a. Bestaat de limiet $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$? Zo ja, wat is de waarde van de limiet? Zo nee, waarom bestaat de limiet niet? Geef ook alle benodigde bewijzen.

- (3) b. Bewijs of weerleg: f is een continue functie $\mathbb{R}$.

Zie ook de volgende bladzijde.

- (9) 8. Zij $f : (0, 2) \rightarrow (-5, 7)$ gegeven door $f(x) = x^3 + 2x - 5$. Toon aan dat f inverseerbaar is en bereken $f^{-1}(-2)$.

9. Beschouw de functierij $\{f_n\}_{n \geq 0}$ met $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$f_n(x) = |\sin x|^n.$$

- (5) a. Bewijs of weerleg: er is een $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zó dat de functierij $\{f_n\}_{n \geq 1}$ puntsgewijs naar f convergeert.
- (4) b. Bewijs of weerleg: er is een $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zó dat de functierij $\{f_n\}_{n \geq 1}$ uniform naar f convergeert.

De waardering voor elke vraag staat in de kantlijn.

Het tentamencijfer wordt berekend volgens de formule

$$\text{Tentamencijfer} = \frac{\text{Totaal} + 9}{9}.$$

EINDE