

Het twee-uur-tentamen bevat vragen 1 t/m 6.
Het drie-uur-tentamen bevat vragen 1 t/m 9.

1. Geef voorbeelden van oneindige verzamelingen A en B en een functie $f : A \rightarrow B$ zó dat f
 - a. bijectief is;
 - b. injectief maar niet bijectief;
 - c. surjectief maar niet injectief;
 - d. niet surjectief en niet injectief.Bewijs altijd dat je voorbeeld de gewenste eigenschappen heeft.
2. Bepaal het infimum en minimum in $\mathbb{R}$ van $V = \{x \in \mathbb{R} : x^3 > 1\}$ of laat zien dat ze niet bestaan; geef ook alle benodigde bewijzen.
3. Formuleer en bewijs de ongelijkheid van Bernoulli.
4. Bewijs met behulp van de definitie dat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2}{2n^2 + 1} = 2.$$

5. Bewijs met behulp van de definitie van de Riemann-integraal dat de functie $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{als } x = 1, \end{cases}$$

Riemann-integreerbaar is en bereken de waarde van $\int_0^1 f(x) dx$.

6. Beschouw de functierij $\{f_n\}_{n \geq 0}$ gedefinieerd door

$$f_n(x) = (\sin x)^{2n}$$

voor elke $n \in \mathbb{N}$ en elke $x \in \mathbb{R}$.

- a. Bewijs of weerleg: er is een $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zó dat de functierij $\{f_n\}_{n \geq 0}$ puntsgewijs naar f convergeert.
- b. Bewijs of weerleg: er is een $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zó dat de functierij $\{f_n\}_{n \geq 0}$ uniform naar f convergeert.

Zie ook de volgende bladzijde.

7. Een functie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heet *Lipschitz continu* als er een constante $K \geq 0$ bestaat zó dat

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$$

voor alle $x, y \in [a, b]$.

- a. Bewijs: een Lipschitz continue functie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ is continu.
- b. Bewijs of weerleg: iedere Lipschitz continue functie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ is uniform continu.

8. Vind het minimum en het maximum van $3x - 2y - z$ en de waarden van x , y en z waarvoor de extremen worden aangenomen als gegeven wordt dat $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 1$.

9. Zij $a \neq 0$ een reëel getal. Bewijs dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ met $n \geq 1$ geldt:

$$\sum_{k=1}^n \frac{a - 1}{a^k} = 1 - \frac{1}{a^n}.$$

De waardering voor elke vraag staat in de kantlijn.

Het twee-uur-tentamencijfer wordt berekend volgens de formule

$$\text{Tentamencijfer} = \frac{\text{Totaal} + 6}{6}.$$

(N.B. Het eindcijfer is gelijk aan 60% tentamencijfer + 20% toetscijfer + 20% huiswerkcijfer.)

Het drie-uur-tentamencijfer wordt berekend volgens de formule

$$\text{Tentamencijfer} = \frac{\text{Totaal} + 9}{9}.$$

(N.B. Het eindcijfer is gelijk aan het tentamencijfer.)

EINDE