

Het tentamen bevat vragen 1 t/m 9.

- (9) 1. Bewijs dat voor elke $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ geldt

$$1 + 5 + 9 + \cdots + (4n - 3) = 2n^2 - n.$$

- (9) 2. Vind het minimum en het maximum van $2x + y - 3z$ en de waarden van x , y en z waarvoor de extremen worden aangenomen als gegeven wordt dat $x^2 + 4y^2 + z^2 = 1$

- (3) 3. a. Geef de definitie van een groep.

- (6) b. Laat zien dat elke cyclische groep abels is.

- (5) 4. a. Toon aan dat elk reëel polynoom van graad tenminste drie reducibel is, dat wil zeggen, het kan geschreven worden als een product van tenminste twee irreducibele reële polynomen van positive graad.

- (2) b. Bewijs of weerleg: elk reëel polynoom van graad tenminste twee is reducibel, dat wil zeggen, het kan geschreven worden als een product van twee irreducibele reële polynomen van positive graad.

- (2) c. Bewijs of weerleg: elk complex polynoom van graad tenminste twee is reducibel, dat wil zeggen, het kan geschreven worden als een product van twee irreducibele complexe polynomen van positive graad.

5. Beschouw de verzameling

$$V = \left\{ \frac{1 - 3n}{n} : n \in \mathbb{N}, n \geq 1 \right\}.$$

- (6) a. Onderzoek of V een infimum en een supremum heeft en zó ja bepaal deze waarden.

- (3) b. Bepaal of het minimum en het maximum van V bestaan.

Gebruik in beide onderdelen duidelijke argumenten.

- (9) 6. Bewijs met behulp van de definitie dat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n + 1}{n} = 3.$$

Zie ook de volgende bladzijde.

7. Beschouw de functierij $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, waarbij elke $f_n : (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven wordt door $f_n(x) = (\cos x)^n$.
- (4 $\frac{1}{2}$) a. Bewijs of weerleg: er is een $f : (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ zó dat de functierij $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ puntsgewijs naar f convergeert.
- (4 $\frac{1}{2}$) b. Bewijs of weerleg: er is een $f : (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ zó dat de functierij $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uniform naar f convergeert.
- (9) 8. Laat $a < b$ twee reële getallen zijn. Een functie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heet *Lipschitz continu* als er een constante $K \geq 0$ bestaat zó dat
- $$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$$
- voor alle $x, y \in [a, b]$. Bewijs: een Lipschitz continue functie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ is continu.
- (9) 9. Bewijs of weerleg: elke reële functie gedefinieerd op een gesloten en begrensd interval is Riemann-integreerbaar.

De waardering voor elke vraag staat in de kantlijn.

Het tentamencijfer wordt berekend volgens de formule

$$\text{Tentamencijfer} = \frac{\text{Totaal} + 9}{9}.$$

EINDE