

(3) 1. Laat zien dat de intervallen $[1, 3)$ en $(2, 8]$ gelijkmachtig zijn.

(2) 2. Bewijs of weerleg dat voor alle $a, b, c \in \mathbb{Z}$ geldt: als $a|bc$, dan $a|b$ of $a|c$.

(4) 3. Bewijs met behulp van volledige inductie dat voor alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ geldt

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + (2n-1)^2 - (2n)^2 = -n(2n+1).$$

(4) 4. Bepaal het supremum, maximum, infimum en minimum van $V = [0, \pi] \cap \mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ of laat zien dat ze niet bestaan; geef ook alle benodigde bewijzen.

(2) 5. Formuleer en bewijs de driehoeksongelijkheid voor reële getallen.

(3) 6. Bepaal het maximum van xyz en de waarden van x , y en z waarvoor dit maximum wordt aangenomen als de positieve reële getallen x , y en z voldoen aan

$$x^3 + 4y^3 + 2z^3 = 9.$$

De waardering voor elke vraag staat in de kantlijn; het cijfer wordt berekend volgens de formule

$$\text{Cijfer} = \frac{\text{Totaal} + 2}{2}.$$

EINDE

1. We proberen een lineaire functie $f: [1, 3] \rightarrow (2, 8]$ te vinden. Een lineaire functie is gegeven door de formule $f(x) = ax + b$. We eisen, bovendien, dat $f(1) = 8$ en $f(3) = 2$. Er geldt dus $f(1) = a + b = 8$ en $f(3) = 3a + b = 2$. We lossen dit stelsel op en de oplossing is $a = -3$ en $b = 11$.
 We moeten nog bewijzen dat de functie $f: [1, 3] \rightarrow (2, 8]$ gegeven door de formule $f(x) = -3x + 11$ bijectief is.
 We bewijzen eerst dat f injectief is. Laat $x_1, x_2 \in [1, 3]$ en neem aan dat $f(x_1) = f(x_2)$. Dan geldt $-3x_1 + 11 = -3x_2 + 11$. Hieruit volgt dat $x_1 = x_2$. We hebben aangetoond dat f injectief is.
 We bewijzen nu dat f surjectief is. Zij $y \in (2, 8]$, we zoeken een $x \in [1, 3]$ zó dat $f(x) = y$. We lossen de volgende vergelijking op:

$$-3x + 11 = y.$$

De oplossing is $x = \frac{11-y}{3}$. We moeten nog nagaan dat de gevonden x de gewenste eigenschappen heeft.
 Uit $y > 2$ volgt $x < \frac{11-2}{3} = 3$, en uit $y \leq 8$ volgt $x \geq \frac{11-8}{3} = 1$, dus inderdaad $x \in [1, 3]$. Verder,

$$f(x) = -3 \left(\frac{11-y}{3} \right) + 11 = y.$$

Hiermee is ook aangetoond dat f surjectief is.

2. Dit is niet juist. Neem $a = 12$, $b = 15$ en $c = 4$. Dan $12 \mid 15 \cdot 4$ want $15 \cdot 4 = 60$ en de vergelijking $12x = 60$ heeft een oplossing $x = 5 \in \mathbb{Z}$. Maar $12 \nmid 15$ en $12 \nmid 4$ want de vergelijkingen $12x = 15$ en $12x = 4$ hebben geen oplossing in $\mathbb{Z}$.
3. STAP 1. Er geldt $1^2 - 2^2 = -3$ en $-1(2 \cdot 1 + 1) = -3$ dus de bewering is waar voor $n = 1$.
 STAP 2. (I.V.) Neem aan dat voor een bepaalde $n \in \mathbb{N}_{>0}$ geldt

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + (2n-1)^2 - (2n)^2 = -n(2n+1).$$

We bewijzen dat de bewering juist is voor $n+1$. Er geldt

$$\begin{aligned} 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + (2n-1)^2 - (2n)^2 + (2(n+1)-1)^2 - (2(n+1))^2 &\stackrel{(I.V.)}{=} \\ -n(2n+1) + (2n+1)^2 - (2(n+1))^2 &= \\ -2n^2 - n + 4n^2 + 4n + 1 - 4n^2 - 8n - 4 &= \\ -2n^2 - 5n - 3 &= \\ -(n+1)(2(n+1)+1). \end{aligned}$$

4. We bewijzen dat $\sup V = \pi$.

Het is makkelijk te zien dat π een bovengrens is want voor elke $x \in V$ geldt $x \leq \pi$.

We bewijzen nu dat π de kleinste bovengrens is. Zij $y < \pi$. Als $y < 0$ dan kan y geen bovengrens van V zijn want $0 \in V$. Neem dus aan dat $0 \leq y < \pi$. Zij $q \in \mathbb{Q}$ met $y < q < \pi$. Omdat $q \in V$ is y geen bovengrens van V . We lieten zien dat π de kleinste bovengrens van V is en dus kunnen we concluderen dat $\sup V = \pi$.

De verzameling V heeft volgens Stelling (II.6.10) geen maximum; dit volgt uit het feit dat $\sup V = \pi$ en $\pi \notin \mathbb{Q}$ dus ook $\pi \notin V$.

Voor elke $x \in V$ geldt dat $0 \leq x$ en $x \in \mathbb{Q}$, dus 0 is een ondergrens van V . Omdat $0 \in \mathbb{Q}$ volgt uit de definitie van minimum dat $\min V = 0$ en uit Stelling (II.6.10) dat $\inf V = \min V = 0$.

5. De Driehoeksongelijkheid luidt: Voor alle $x, y \in \mathbb{R}$ geldt

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

BEWIJS: Voor iedere $x \in \mathbb{R}$ geldt:

$$|x| = \max\{-x, x\}.$$

Hieruit volgt dat $-x \leq |x|$ en $-y \leq |y|$, zodat

$$-x - y \leq |x| + |y|.$$

Er volgt eveneens dat $x \leq |x|$ en $y \leq |y|$, zodat

$$x + y \leq |x| + |y|.$$

Dit laat zien dat $|x| + |y|$ een bovengrens is voor de verzameling $\{-x - y, x + y\}$. Maar

$$|x + y| = \max\{-x - y, x + y\} = \sup\{-x - y, x + y\}$$

is de kleinste bovengrens van deze verzameling, zodat $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Zie ook de volgende bladzijde.

6. Volgens de Ongelijkheid van Rekenkundig en Meetkundig Gemiddelde geldt

$$\sqrt[3]{x^3 \cdot 4y^3 \cdot 2z^3} \leq \frac{x^3 + 4y^3 + 2z^3}{3} = 3$$

en de gelijkheid treedt op dan en slechts dan als $x^3 = 4y^3 = 2z^3$. Hieruit volgt dat

$$xyz \leq \frac{3}{2}$$

en het is makkelijk te zien dat xyz maximaal is als $xyz = \frac{3}{2}$ dus als de gelijkheid in de Ongelijkheid van Rekenkundig en Meetkundig Gemiddelde optreedt. Er moet dus gelden $x^3 = 4y^3 = 2z^3$. Na invullen in de voorwaarde $x^3 + 4y^3 + 2z^3 = 9$ krijgen we $x = \sqrt[3]{3}$, $y = \sqrt[3]{3/4}$ en $z = \sqrt[3]{3/2}$. Het maximum is $3/2$.