

1. Laat $f : A \rightarrow B$ en $g : B \rightarrow C$ twee functies zijn. Bewijs of weerleg:

- (3) a. Als f en g injectief zijn dan is $g \circ f$ injectief.
- (3) b. Als $g \circ f$ injectief is dan is f injectief.
- (3) c. Als $g \circ f$ injectief is dan is g injectief.

(9) 2. Bewijs met behulp van volledige inductie dat voor elk natuurlijk getal $n \geq 0$ geldt

$$\cos \alpha \times \cos 2\alpha \times \cdots \times \cos 2^n \alpha = \frac{\sin 2^{n+1} \alpha}{2^{n+1} \sin \alpha}.$$

(N.B. Je mag de formule $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ gebruiken.)

- (3) 3. a. Geef de definitie van een groep.
- (3) b. Bewijs of weerleg: De verzameling van alle oneven natuurlijke getallen met de vermenigvuldiging is een groep.
- (3) c. Laat $(G, *)$ een groep zijn. Bewijs dat voor elke $a, b, c \in G$ geldt

$$\text{als } a * c = b * c \quad \text{dan } a = b.$$

4. Beschouw het polynoom $p(x) = x^6 + 1$.

- (5) a. Schrijf $p(x)$ als product van irreducibele complexe polynomen.
- (4) b. Schrijf $p(x)$ als product van irreducibele reële polynomen.

5. Laat $V = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}$.

- (6) a. Vind $\inf V$ en $\sup V$; gebruik duidelijke argumenten.
- (3) b. Vind $\min V$ en $\max V$; gebruik duidelijke argumenten.

(9) 6. Gegeven zijn twee reële rijen $\{x_n\}_{n \geq 0}$ en $\{y_n\}_{n \geq 0}$ in $\mathbb{R}$. Bewijs met behulp van de definitie: als $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ en $\{y_n\}_{n \geq 0}$ begrensd is dan geldt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = 0.$$

Zie ook de volgende bladzijde.

7. Beschouw de functie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gedefinieerd door $f(x) = 5x - 2$.
- (5) a. Bewijs met behulp van de definitie dat f continu is op $\mathbb{R}$.
- (4) b. Bewijs of weerleg: f is uniform continu op $\mathbb{R}$.
8. Bewijs of weerleg:
- (4) a. De functie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, gedefinieerd door $f(x) = x \cdot |x|$, is differentieerbaar in $c = 0$.
- (5) b. De functie $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, gedefinieerd door $f(x) = \sqrt{x}$, is differentieerbaar op het open interval $(0, \infty)$.
- (9) 9. Bewijs of weerleg:
Elke functie $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ is Riemann-integreerbaar.

De waardering voor elke vraag staat in de kantlijn; het tentamencijfer wordt berekend volgens de formule

$$\text{Tentamencijfer} = \frac{\text{Totaal} + 9}{9}.$$

(N.B. Het eindcijfer is gelijk aan het tentamencijfer.)

EINDE

1. (a) De bewering is waar. Als $a \neq b$ dan $f(a) \neq f(b)$ want f is injectief en dan ook $g(f(a)) \neq g(f(b))$ want ook g is injectief.
 (b) De bewering is waar. Neem aan dat f niet injectief is. Dan zijn er $a \neq b$ met $f(a) = f(b)$. Maar dan moet $g(f(a)) = g(f(b))$, tegenspraak.
 (c) De bewering is niet waar. Beschouw $A = \{1, 2\}$, $B = \{3, 4, 5\}$ en $C = \{6, 7\}$ en $f : A \rightarrow B$ gegeven door $f(1) = 3$, $f(2) = 4$, en $g : B \rightarrow C$ gegeven door $g(3) = 6$ en $g(4) = g(5) = 7$. De functie g is niet injectief want $4 \neq 5$ maar $g(4) = g(5) = 7$. Maar $g \circ f$ is injectief: $g(f(1)) = 6 \neq g(f(2)) = 7$.

2. Stap I. Voor $n = 0$ is de bewering waar:

$$\cos 2^0 \alpha = \cos \alpha = \frac{\sin 2^1 \alpha}{2 \sin \alpha} = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{2 \sin \alpha} = \cos \alpha.$$

Stap II. Neem aan dat de formule geldt voor een $n \geq 0$. Dan geldt

$$\begin{aligned} \cos \alpha \times \cos 2\alpha \times \cdots \times \cos 2^n \alpha \times \cos 2^{n+1} \alpha &\stackrel{I.V.}{=} \frac{\sin 2^{n+1} \alpha \times \cos 2^{n+1} \alpha}{2^{n+1} \sin \alpha} \\ &= \frac{2 \sin 2^{n+1} \alpha \times \cos 2^{n+1} \alpha}{2^{n+2} \sin \alpha} \\ &= \frac{\sin 2^{n+2} \alpha}{2^{n+2} \sin \alpha}. \end{aligned}$$

3. (a) Zij G een niet-lege verzameling en $*$ een binaire operatie op G (dat wil zeggen, voor elke $x, y \in G$ bestaat $x * y \in G$). Het paar $(G, *)$ heet een *groep* als aan de volgende eisen voldaan is:

- (i) voor elke $x, y, z \in G$ geldt

$$(x * y) * z = x * (y * z)$$

(de *associatieve wet*)

- (ii) er is een $e \in G$ zó dat voor elke $x \in G$ geldt

$$e * x = x \quad \text{en} \quad x * e = x$$

(existentie van een *eenheidselement*)

- (iii) voor elke $x \in G$ is er een $x' \in G$ met

$$x * x' = e \quad \text{en} \quad x' * x = e$$

(existentie van een *inverse*)

- (b) De bewering is niet waar. 1 is het eenheidselement want voor elk getal x geldt dat $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$, maar voor $x = 3$ is er geen inverse.

- (c) Neem aan $a * c = b * c$. Zij c' de inverse van c . Dan

$$(a * c) * c' = (b * c) * c'.$$

Gebruik nu associativiteit en het feit dat $c * c' = e$, $a * e = a$ en $b * e = b$. We krijgen $a = b$.

4. (a) $x^6 + 1 = 0$ heeft 6 complexe wortels: $x_0 = \sqrt{3}/2 + i/2$, $x_1 = i$, $x_2 = -\sqrt{3}/2 + i/2$, $x_3 = -\sqrt{3}/2 - i/2$, $x_4 = -i$ en $x_5 = \sqrt{3}/2 - i/2$. Dan geldt $p(x) = (x - x_0) \cdots (x - x_5)$. De polynomen zijn irreducibel omdat ze van graad 1 zijn.
 (b) $p(x) = (x - x_0)(x - x_5)(x - x_1)(x - x_4)(x - x_2)(x - x_3) = (x^2 - \sqrt{3}x + 1)(x^2 + 1)(x^2 + \sqrt{3}x + 1)$. De polynomen zijn irreducibel omdat ze geen reële nulpunten hebben.

5. (a) Voor elke $n \geq 1$ geldt $\frac{1}{n} \geq 0$ dus 0 is een ondergrens van V .
 Als $x > 0$ dan $\frac{1}{x} > 0$ en volgens de Archimedische eigenschap is er een $n \in \mathbb{N}$ met $\frac{1}{x} > 0 < n$. Dan is $x > \frac{1}{n}$ en $\frac{1}{n} \in V$. Dus x is geen ondergrens van V .
 Voor elke $n \geq 1$ geldt $\frac{1}{n} \leq 1$ dus 1 is een bovengrens van V .
 $1 = \frac{1}{1} \in V$ dus $\max V = 1$. Dus $\sup V = \max V = 1$.
 (b) We hebben al bewezen dat $\max V = 1$. Als $\min V$ bestaat dan moet $\min V = \inf V = 0$. Dit is onmogelijk: er is geen natuurlijk getal n met $\frac{1}{n} = 0$.

- (b) 3 pt

Zie ook de volgende bladzijde.

6. Zij $\varepsilon > 0$ willekeurig. Omdat $\{y_n\}$ begrensd is is er een $M > 0$ zó dat voor alle $n \geq 0$ geldt $|y_n| < M$. Omdat $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ is er voor $\varepsilon/M > 0$ een $N \in \mathbb{N}$ te vinden met $|x_n| < \varepsilon/M$ voor alle $n \geq N$. Dan geldt voor alle $n \geq N$

$$|x_n \cdot y_n| < |x_n| \cdot M < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon.$$

7. (a) Zij $x \in \mathbb{R}$ willekeurig. Zij $\varepsilon > 0$ willekeurig. Kies $\delta = \varepsilon/5$, dan voor alle $y \in \mathbb{R}$ met $|x - y| < \delta$ geldt

$$|5x - 2 - 5y + 2| = 5|x - y| < 5\delta = 5 \frac{\varepsilon}{5} = \varepsilon.$$

- (b) De gevonden δ is afhankelijk alleen van ε .

8. (a) De bewering is waar.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0.$$

- (b) De bewering is waar. Zij $c > 0$ willekeurig dan

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{c}}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{c})(\sqrt{x} + \sqrt{c})}{(x - c)(\sqrt{x} + \sqrt{c})} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{c}} = \frac{1}{2\sqrt{c}}.$$

9. Beschouw $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 1 & \text{als } x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Omdat tussen elk paar reële getallen een rationaal getal ligt is elke Riemann-ondersom gelijk aan 0, en omdat tussen elk paar reële getallen een irrationaal getal ligt is elke Riemann-bovensom gelijk aan 1. Hieruit volgt

$$\int_0^1 f(x) dx = 0 \quad \text{en} \quad \overline{\int_0^1 f(x) dx} = 1.$$

Omdat de boven- en onder-integralen niet aan elkaar gelijk zijn kan de functie niet Riemann-integreerbaar zijn.