

Het twee-uur-tentamen bevat vragen 1 t/m 6.

Het drie-uur-tentamen bevat vragen 1 t/m 9.

Geef op het eerste tentamen-velletje aan of je het twee- of drie-uur-tentamen doet.

- (9) 1. Bewijs dat voor elke $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ geldt

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n(n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2).$$

2. Zij $(G, *)$ een groep. Bewijs de volgende beweringen:

$(4\frac{1}{2})$ a. Er bestaat precies één eenheidselement in G .

$(4\frac{1}{2})$ b. Elk element in G heeft precies één inverse.

3. Laat $p(x)$ een polynoom van graad m en $q(x)$ een polynoom van graad n zijn met $m \leq n$. Bewijs of weerleg:

$(4\frac{1}{2})$ a. De graad van $p(x) + q(x)$ is gelijk aan n .

$(4\frac{1}{2})$ b. De graad van $p(x) \cdot q(x)$ is gelijk aan $m + n$.

4. Beschouw de verzameling

$$V = \left\{ \frac{2n+1}{n} : n \in \mathbb{N}, n \geq 1 \right\}.$$

(6) a. Vind het infimum van V .

(3) b. Bepaal of het minimum van V bestaat.

5. Beschouw de functierij $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, waarbij elke $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven wordt door $f_n(x) = x^{2n}$.

$(4\frac{1}{2})$ a. Bewijs of weerleg: er is een $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ zó dat de functierij $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ puntsgewijs naar f convergeert.

$(4\frac{1}{2})$ b. Bewijs of weerleg: er is een $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ zó dat de functierij $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uniform naar f convergeert.

- (9) 6. Bewijs met behulp van de definitie dat $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n} = 0$.

Zie ook de volgende bladzijde.

- (4½) 7. a. Bepaal of de volgende permutatie even of oneven is; gebruik duidelijke argumenten.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 3 & 1 & 4 & 8 & 7 & 2 & 5 & 9 \end{pmatrix}.$$

- (4½) b. Bewijs of weerleg: elke cyclische groep is abels.

- (9) 8. Bewijs dat $x^3 + 3x + 5 = 0$ op het interval $[-2, -1]$ precies één oplossing heeft.

- (9) 9. Zij $f : (1, 2) \rightarrow \mathbb{R}$ een differentieerbare functie met begrensde afgeleide. Toon aan dat f uniform continu is.

De waardering voor elke vraag staat in de kantlijn.

Het twee-uur-tentamencijfer wordt berekend volgens de formule

$$\text{Tentamencijfer} = \frac{\text{Totaal} + 6}{6}.$$

(N.B. Het eindcijfer is gelijk aan 60% tentamencijfer + 20% toetscijfer + 20% huiswerkcijfer.)

Het drie-uur-tentamencijfer wordt berekend volgens de formule

$$\text{Tentamencijfer} = \frac{\text{Totaal} + 9}{9}.$$

(N.B. Het eindcijfer is gelijk aan het tentamencijfer.)

EINDE

1. STAP 1. De bewering is waar voor $n = 1$:

$$1 \cdot 2 = \frac{1}{3} \cdot 1(1+1)(1+2).$$

STAP 2. (I.V.) Neem aan dat voor een bepaalde $n \geq 1$ geldt

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n(n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2).$$

Dan geldt

$$\begin{aligned} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n(n+1) + (n+1)(n+2) &\stackrel{(I.V.)}{=} \frac{1}{3}n(n+1)(n+2) + (n+1)(n+2) \\ &= (n+1)(n+2)\left(\frac{1}{3}n+1\right) \\ &= \frac{1}{3}(n+1)(n+2)(n+3). \end{aligned}$$

De bewering is dus waar ook voor $n+1$. Volgens het Principe van Volledige inductie geldt de bewering voor alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

2. (a) Volgens de definitie is er tenminste één eenheidselement.

Neem aan dat e en e^* beide eenheidselementen zijn. Dan geldt voor elke $x \in G$

$$x * e = x = e * x \quad \text{en} \quad x * e^* = x = e^* * x.$$

Dan geldt $e = e * e^*$ (omdat e^* een eenheidselement is) en $e^* = e * e^*$ (omdat e een eenheidselement is). Hieruit volgt dat $e = e^*$.

(b) Zij $x \in G$ willekeurig. Volgens de definitie heeft x tenminste één inverse.

Neem aan dat $x', x'' \in G$ bestaan zó dat $x * x' = x' * x = e$ en $x * x'' = x'' * x = e$, waarbij e het eenheidselement van G is. Dan geldt

$$x' = x' * e = x' * (x * x'') = (x' * x) * x'' = e * x'' = x''.$$

3. (a)

De bewering is niet waar. Een tegenvoorbeeld: $p(x) = x^2 + x$, $q(x) = -x^2 + 1$. Beide polynomen zijn van graad 2 maar $p(x) + q(x) = x + 1$ heeft graad 1.

(b)

De bewering is waar. Laat $p(x) = a_m x^m + \cdots + a_0$ met $a_m \neq 0$ en $q(x) = b_n x^n + \cdots + b_0$ met $b_n \neq 0$. Dan $p(x)q(x) = a_m b_n x^{n+m} + \cdots + a_0 b_0$. Omdat $a_m \neq 0$ en $b_n \neq 0$ geldt $a_m b_n \neq 0$. Hieruit kunnen we concluderen dat de graad van $p(x) \cdot q(x)$ gelijk is aan $m + n$.

4. (a) Merk eerst op dat $x \in V$ desda $x = 2 + \frac{1}{n}$ met $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. De verzameling V is niet leeg want $3 = 2 + \frac{1}{1} \in V$. We bewijzen dat $\inf V = 2$.

2 is een ondergrens van V want voor elke $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ geldt $\frac{1}{n} > 0$ en dus $2 + \frac{1}{n} > 2$.

2 is de grootste ondergrens. Immers, stel $x > 2$. Dan is $x - 2 > 0$ en dus $\frac{1}{x-2} > 0$. Volgens de Archimedische Eigenschap is er een $N \in \mathbb{N}$ met $\frac{1}{x-2} < N$. Maar dan is $\frac{1}{N} < x - 2$, dus $2 + \frac{1}{N} < x$. Omdat $2 + \frac{1}{N} \in V$ kan x geen ondergrens van V zijn.

(b) Als het minimum bestaat moet $\min V = \inf V = 2$ zijn. Maar dan moet $2 \in V$ zijn en dat kan niet: $2 \neq 2 + \frac{1}{n}$ voor elke $n \geq 1$ want $\frac{1}{n} > 0$.

5. (a) Zij $x \in [0, 1]$ dan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n} = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

Dus de rij convergeert punstgewijs naar f gedefinieerd door

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

(b) De convergentie is niet uniform want elke f_n is continu maar f niet.

6. Zij $\varepsilon > 0$. Kies $N \in \mathbb{N}$ met $N \geq \frac{3}{\varepsilon}$. Dan geldt voor alle $n \in \mathbb{N}$

$$\left| \frac{3}{n} - 0 \right| = \frac{3}{n} \leq \frac{3}{N} < \varepsilon.$$

Zie ook de volgende bladzijde.

7. (a) We schrijven eerst de permutatie als een product van disjuncte cykels:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 3 & 1 & 4 & 8 & 7 & 2 & 5 & 9 \end{pmatrix} = (16723)(4)(58)(9) = (16723)(58).$$

We kunnen de cykels als een product van transposities schrijven:

$$(16723)(58) = (16)(67)(72)(23)(58).$$

Er zijn oneven veel transposities, dus de permutatie is oneven.

(b) De bewering is waar. Zij a een generator van G , d.w.z., voor elke $x \in G$ is er een $n \in \mathbb{Z}$ met $x = a^n$. Laat $x, y \in G$ zijn. Schrijf $x = a^n$ en $y = a^m$, dan $x * y = a^{n+m} = a^{m+n} = y * x$.

8. De functie $f : [-2, -1] \rightarrow \mathbb{R}$ is continu want polynomen zijn continu. Er geldt $f(-2) = -9 < 0$ en $f(-1) = 1 > 0$ dus er is tenminste één oplossing op $[-2, -1]$. Maar $f'(x) = 3x^2 + 3 > 0$ voor elke x dus f is strikt stijgend. Hieruit volgt dat er niet meer dan één oplossing kan bestaan.

9. Kies $K > 0$ met $|f'(x)| < K$ voor alle $x \in (1, 2)$; zo'n K bestaat want f begrensde afgeleide heeft. Zij $\varepsilon > 0$, kies $\delta = \frac{\varepsilon}{K}$. Dan voor alle $x, y \in (1, 2)$ met $|x - y| < \delta$ geldt

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y| < K\delta = \varepsilon.$$

De eerste ongelijkheid geldt volgens de Middelwaardeongelijkheid.