

1. Beschouw de functie  $f : [2, 3) \rightarrow B$  gegeven door  $f(x) = \frac{1-3x}{x}$ .
- (3) a. Bewijs dat  $f$  injectief is.
- (6) b. Bepaal  $B$  zó dat  $f$  surjectief is en bepaal in dit geval de inverse van  $f$ .
- (9) 2. Bewijs dat voor elke  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$  geldt
- $$(1\ 2)(2\ 3) \cdots (n-1\ n) = (1\ 2\ \dots\ n),$$
- waarbij  $(i\ i+1)$ ,  $i = 1, \dots, n$  en  $(1\ 2\ \dots\ n)$  cykels op  $\{1, 2, \dots, n\}$  zijn.
3. Zij  $\star$  de vermenigvuldiging modulo 5. Bewijs of weerleg:
- (3) a.  $(\{1, 2, 3, 4\}, \star)$  is een groep.
- (2) b.  $(\{1, 2, 3, 4\}, \star)$  is een commutatieve groep.
- (4) c.  $(\{1, 2, 3, 4\}, \star)$  is een cyclische groep.
4. Zij  $(G, \star)$  een groep. Bewijs:
- $(4\frac{1}{2})$  a. Er bestaat precies één eenheidselement in  $G$ .
- $(4\frac{1}{2})$  b. Elk element in  $G$  heeft precies één inverse.
- (9) 5. Toon aan dat elk reëel polynoom van graad tenminste 3 reëel reducibel is, dat wil zeggen, dat het geschreven kan worden als een product van reële polynomen van positieve graad.

---

De waardering voor elke vraag staat in de kantlijn; het cijfer wordt berekend volgens de formule

$$\text{Cijfer} = \frac{\text{Totaal} + 5}{5}.$$

EINDE

1. (a)

Om te bewijzen dat  $f$  injectief is laten we zien dat voor alle  $x, y \in [2, 3)$  met  $f(x) = f(y)$  geldt  $x = y$ .  
 Laat  $x, y \in [2, 3)$  willekeurig zijn en neem aan dat

$$\frac{1-3x}{x} = \frac{1-3y}{y}.$$

Vermenigvuldig beide kanten met  $xy$ ; we krijgen

$$(1-3x)y = (1-3y)x.$$

Hieruit volgt dat  $x = y$  (tel bij beide kanten  $3xy$  op).

(b)

We laten zien dat als  $B = (-\frac{8}{3}, -\frac{5}{2}]$  dan is  $f : [2, 3) \rightarrow B$  surjectief.  
 Zij  $y \in (-\frac{8}{3}, -\frac{5}{2}]$  willekeurig. We zoeken een  $x \in [2, 3)$  zó dat

$$\frac{1-3x}{x} = y.$$

Vermenigvuldig beide kanten met  $x$ , we krijgen

$$1-3x = xy.$$

Hieruit volgt

$$x = \frac{1}{y+3}.$$

We moeten nog laten zien dat  $x \in [2, 3)$  en  $f(x) = y$ .

Uit  $-\frac{8}{3} < y \leq -\frac{5}{2}$  volgt dat  $\frac{1}{3} < y+3 \leq \frac{1}{2}$  en dus  $2 \leq \frac{1}{y+3} < 3$ ; we lieten zien dat  $x \in [2, 3)$ .

Als  $x = \frac{1}{y+3}$  dan

$$f(x) = \frac{1-3 \cdot \frac{1}{y+3}}{\frac{1}{y+3}} = \frac{y+3-3}{1} = y.$$

We hebben bewezen dat

$$f : [2, 3) \rightarrow \left(-\frac{8}{3}, -\frac{5}{2}\right]$$

surjectief is. Omdat  $f$  ook injectief is is  $f$  bijectief en de inverse van  $f$  bestaat:

$$f^{-1} : \left(-\frac{8}{3}, -\frac{5}{2}\right] \rightarrow [2, 3)$$

is gegeven door (voor de afleiding zie boven)

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{x+3}.$$

2. We bewijzen de bewering met behulp van volledige inductie.

STAP 1: Als  $n = 2$  dan geldt  $(2 \ 1 \ 2) = (1 \ 2)$ .

STAP 2: (I.V.) Neem aan dat voor een zekere  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$  geldt:

$$(1 \ 2)(2 \ 3) \cdots (n-1 \ n) = (1 \ 2 \ \dots \ n).$$

We bewijzen dat de bewering ook voor  $n+1$  geldt.

We beschouwen alle permutaties op de verzameling  $\{1, 2, \dots, n, n+1\}$ . Er geldt

$$(1 \ 2)(2 \ 3) \cdots (n-1 \ n)(n \ n+1) \stackrel{(I.V.)}{=} (1 \ 2 \ \dots \ n)(n \ n+1).$$

Noem  $\varphi = (1 \ 2 \ \dots \ n)$  en  $\psi = (n \ n+1)$ ; beide zijn cyclen op de verzameling  $\{1, 2, \dots, n, n+1\}$ . Dan geldt:

$$\varphi(k) = \begin{cases} k+1, & 1 \leq k \leq n-1 \\ 1, & k = n \\ n+1, & k = n+1. \end{cases} \quad \text{en} \quad \psi(k) = \begin{cases} k, & 1 \leq k \leq n-1 \\ n+1, & k = n \\ n, & k = n+1. \end{cases}$$

Dus

$$(\varphi \circ \psi)(k) = \varphi(\psi(k)) = \begin{cases} \varphi(k) = k+1, & 1 \leq k \leq n-1 \\ \varphi(n+1) = n+1, & k = n \\ \varphi(n) = 1, & k = n+1. \end{cases}$$

We hebben bewezen dat  $(\varphi \circ \psi) = (1 \ 2 \ \dots \ n \ n+1)$  en dus  $(1 \ 2)(2 \ 3) \cdots (n-1 \ n)(n \ n+1) = (1 \ 2 \ \dots \ n \ n+1)$ .

Zie ook de volgende bladzijde.

3. (a)

 We beschrijven eerst de operatie  $\star$  met behulp van een tabel

| $\star$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---------|---|---|---|---|
| 1       | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 2       | 2 | 4 | 1 | 3 |
| 3       | 3 | 1 | 4 | 2 |
| 4       | 4 | 3 | 2 | 1 |

 Uit de tabel volgt dat  $\star$  een binaire operatie op  $\{1, 2, 3, 4\}$  is: voor elke  $x, y \in \{1, 2, 3, 4\}$  geldt dat  $x \star y \in \{1, 2, 3, 4\}$ .

De associatieve wet volgt uit de associativiteit van de vermenigvuldiging van reële getallen.

 Het eenheidselement is 1 want voor elke  $x \in \{1, 2, 3, 4\}$  geldt  $1 \star x = x \star 1 = x$ , zie de tabel.

 Elk element  $x \in \{1, 2, 3, 4\}$  heeft een inverse  $x'$ :  $1' = 1$ ,  $2' = 3$ ,  $3' = 2$  en  $4' = 4$ . Immers,  $1 \star 1 = 1$ ,  $2 \star 3 = 3 \star 2 = 1$ ,  $4 \star 4 = 1$ .

 We hebben bewezen dat  $(\{1, 2, 3, 4\}, \star)$  een groep is.

(b)

 Er geldt  $x \star y = y \star x$  voor elke  $x, y \in \{1, 2, 3, 4\}$ ; zie de tabel (hij is symmetrisch ten opzichte van de "hoofd-diagonaal"). De groep is dus commutatief.

(c)

 De groep is cyclisch; een generator is bijvoorbeeld 2. Immers:  $2^0 = 1$ ,  $2^1 = 2$ ,  $2^2 = 2 \star 2 = 4$  en  $2^3 = 2 \star 2 \star 2 = 3$ .

4. (a)

 Volgens de definitie van een groep bestaat tenminste één eenheidselement. We bewijzen nu dat er niet meer dan één eenheidselement kan bestaan. Neem aan dat  $e, f \in G$  beide eenheidselementen van  $G$  zijn. Voor elke  $x \in G$  geldt dan  $x \star e = e \star x = x$  en  $x \star f = f \star x = x$ . In het bijzonder

$$e = e \star f = f.$$

(b)

 Zij  $y \in G$  willekeurig; we houden  $y$  tot het einde van het bewijs vast. Volgens de definitie van een groep heeft  $y$  tenminste één inverse. We bewijzen nu dat er niet meer dan één inverse van  $y$  kan bestaan. Neem aan dat  $y', y'' \in G$  beide inversen van  $y$  zijn. Dan geldt  $y \star y' = y' \star y = e$  en  $y \star y'' = y'' \star y = e$ , waarbij  $e$  het eenheidselement van  $G$  is (zijn uniciteit en existentie hebben we net bewezen). Hieruit volgt

$$y' = y' \star e = y' \star (y \star y'') = (y' \star y) \star y'' = e \star y'' = y''.$$

 5. Zij  $p(x)$  een reël polynoom van graad tenminste 3. We moeten laten zien dat  $p(x)$  te schrijven is als product van reële polynomen van positieve graden.

 Volgens de Hoofdstelling van de Algebra heeft  $p(x)$  een (complex) nulpunt  $c$ . We onderscheiden twee gevallen:

 GEVAL 1:  $c \in \mathbb{R}$ .

 Dan is  $p(x)$  deelbaar door  $x - c$ , dat wil zeggen, er is een reëel polynoom  $q(x)$  zó dat

$$p(x) = q(x) \cdot (x - c).$$

 Omdat de graad van  $x - c$  gelijk aan 1 is moet  $q(x)$  een positieve graad hebben (in feite, tenminste 2).

 GEVAL 1:  $c \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ .

 Omdat  $p(x)$  een reëel polynoom is, moet de complex geconjugeerde  $\bar{c}$  ook een nulpunt van  $p(x)$  zijn. Dan is  $p(x)$  deelbaar door  $x - c$  en ook door  $x - \bar{c}$ , en bijgevolg door  $r(x) = (x - c)(x - \bar{c}) = (x^2 - 2 \operatorname{Re} x + |c|^2)$ . Merk op dat  $r(x)$  een reëel polynoom is van graad 2. Hieruit volgt dat er een reëel polynoom  $q(x)$  moet zijn van graad tenminste 1 waarvoor geldt

$$p(x) = q(x) \cdot r(x).$$