

Het twee-uur-tentamen bevat vragen 1 t/m 6.

Het drie-uur-tentamen bevat vragen 1 t/m 9.

Op het eerste tentamen-velletje geef aan of je het twee- of drie-uur-tentamen doet.

1. Geef voorbeelden van oneindige verzamelingen $A, B \subseteq \mathbb{R}$ en een functie $f : A \rightarrow B$ die
 - (4 $\frac{1}{2}$) (a) surjectief maar niet injectief is;
 - (4 $\frac{1}{2}$) (b) injectief maar niet surjectief is.Bewijs in beide gevallen dat je gegeven voorbeelden aan de gevraagde eisen voldoen.
- (9) 2. Bewijs met behulp van de volledige inductie dat voor alle natuurlijke getallen $n \geq 1$ de volgende gelijkheid geldt:
$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$
3. Zij $\star$ vermenigvuldiging modulo 8.
 - (6) (a) Beschrijf de operatie $\star$ met behulp van een tabel en bewijs dat $(\{1, 3, 5, 7\}, \star)$ een groep is (je mag hierbij gebruiken dat vermenigvuldiging modulo 8 associatief is).
 - (3) (b) Bewijs of weerleg: $(\{1, 3, 5, 7\}, \star)$ is een cyclische groep.
4. Beschouw de verzameling $V = \{x \in \mathbb{R} : 3x < 12\}$.
 - (6) (a) Bewijs dat $\sup V = 4$.
 - (3) (b) Bewijs of weerleg: $\max V$ bestaat.
- (9) 5. Bewijs dat iedere convergente rij in $\mathbb{R}$ een Cauchy-rij is.
6. Beschouw de functierij $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, waarbij elke $f_n : [0, \frac{1}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven wordt door $f_n(x) = x^n$. Laat $f : [0, \frac{1}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ de nulfunctie zijn, dat wil zeggen, $f(x) = 0$ voor elke $x \in [0, \frac{1}{2}]$.
 - (4) (a) Bewijs dat de functierij $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ puntsgewijs naar f convergeert.
 - (5) (b) Bewijs of weerleg: de functierij $\{f_n\}_{n \geq 1}$ convergeert uniform naar f .

Zie ook de volgende bladzijde.

- (9) 7. Beschouw de relatie $\sim$ gedefinieerd op de verzameling $\mathbb{Z}$ van alle gehele getallen door

$$x \sim y \quad \text{dan en slechts dan als} \quad 5 \mid (x - y).$$

Bewijs of weerleg: $\sim$ is een equivalentie-relatie.

8. Zij $p(x) = x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ een reëel polynoom. Gegeven is dat $p(1 - i) = 0$ en $p(2i) = 0$.
- (5) (a) Vind $p(x)$ (dat wil zeggen, bepaal de coëfficiënten a_3 , a_2 , a_1 en a_0).
- (2) (b) Schrijf $p(x)$ als product van irreducibele complexe polynomen.
- (2) (c) Schrijf $p(x)$ als product van irreducibele reële polynomen.
- (9) 9. Zij $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ continu en neem aan dat in een punt $p \in (a, b)$ geldt $f(p) > 0$. Toon aan dat er een interval $(c, d) \subseteq (a, b)$ bestaat met $c < p < d$ en $f(x) > 0$ voor elke $x \in (c, d)$.

De waardering voor elke vraag staat in de kantlijn.

Het twee-uur-tentamencijfer wordt berekend volgens de formule

$$\text{Tentamencijfer} = \frac{\text{Totaal} + 6}{6}.$$

(N.B. Het eindcijfer is gelijk aan 60% tentamencijfer + 20% toetscijfer + 20% huiswerkcijfer.)

Het drie-uur-tentamencijfer wordt berekend volgens de formule

$$\text{Tentamencijfer} = \frac{\text{Totaal} + 9}{9}.$$

(N.B. Het eindcijfer is gelijk aan het tentamencijfer.)

EINDE

1. (a) Neem $A = (-2, 2)$, $B = (0, 4)$ en $f : A \rightarrow B$ gegeven door $f(x) = x^2$.
 We laten eerst zien dat f surjectief is. Zij $y \in B$ willekeurig. Omdat y positief is bestaat $x = \sqrt{y}$, en omdat $y < 4$ geldt dat $x = \sqrt{y} < 2$. Dus $x \in A$ en er geldt $f(x) = x^2 = (\sqrt{y})^2 = y$.
 De functie f is niet injectief. Immers, $-1 \neq 1$ en $-1, 1 \in A$ maar $f(-1) = (-1)^2 = 1$ en ook $f(1) = 1^2 = 1$.
 (b) Neem $A = [0, 1]$, $B = \mathbb{R}$ en $f : A \rightarrow B$ gegeven door $f(x) = 2x$.
 We bewijzen eerst dat f injectief is. Neem aan $x, y \in A$ met $f(x) = f(y)$. Dan geldt $2x = 2y$ en dus $x = y$.
 De functie f is niet surjectief. Immers, $5 \in B$ maar er is geen $x \in A$ met $f(x) = 5$ want voor elke $x \leq 1$ geldt dat $f(x) = 2x \leq 2$.

2. STAP 1: De bewering is waar voor $n = 1$:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2}.$$

STAP 2: Stel dat de bewering waar is voor een bepaalde $n \geq 1$ (de inductieveronderstelling); we laten nu zien dat de bewering ook juist is voor $n + 1$; volgens het Principe van Volledige Inductie is de formule dan waar voor elke $n \geq 1$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} + \frac{1}{(n+1) \cdot (n+2)} &\stackrel{(IV)}{=} \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1) \cdot (n+2)} \\ &= \frac{(n+1)^2}{(n+1) \cdot (n+2)} \\ &= \frac{n+1}{n+2}. \end{aligned}$$

3. (a) De operatie is gegeven door de volgende tabel:

$\star$	1	3	5	7
1	1	3	5	7
3	3	1	7	5
5	5	7	1	3
7	7	5	3	1

Voor elke $x \in \{1, 3, 5, 7\}$ geldt dat $1 \star x = x \star 1 = x$ dus 1 is het eenheidselement. Uit de tabel volgt dat elke x zijn eigen inverse is; er geldt namelijk $x \star x = 1$ voor elke $x \in \{1, 3, 5, 7\}$. We bewijzen nu dat voor alle $x, y, z \in \{1, 3, 5, 7\}$ geldt $x \star (y \star z) = (x \star y) \star z$. Neem aan dat $x \star (y \star z) = u$, dat betekent dat er een $k \in \mathbb{Z}$ bestaat met $x \cdot (y \cdot z) = u + 8k$. Omdat vermenigvuldiging van reële getallen associatief is geldt $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z = u + 8k$. Hieruit volgt dat $(x \star y) \star z = u$.

(b) Het eenheidselement is geen generator want elke macht van 1 is 1. Verder geldt $\{3^n : n \in \mathbb{Z}\} = \{1, 3\}$, dus 3 is ook geen generator. Analoog zijn 5 en 7 geen generatoren want er geldt dat $\{5^n : n \in \mathbb{Z}\} = \{1, 5\}$ en $\{7^n : n \in \mathbb{Z}\} = \{1, 7\}$. De groep is dus niet cyclisch.

4. (a) Merk eerst op dat $V \neq \emptyset$ want $3 \cdot 1 = 3 < 12$ en dus $1 \in V$. Als $x \in V$ dan geldt $3x < 12$ ofwel $x < 4$ dus V is naar boven begrensd met 4 als een bovengrens. We laten nu zien dat 4 de kleinste bovengrens is. Neem aan $y < 4$. Zij $z = (y+4)/2$, dan $3z = 3(y+4)/2 < 3(4+4)/2 = 12$, dus $z \in V$. Maar $y < z$ dus y is geen bovengrens van V .
 (b) Als $\max V$ bestaat dan moet $\sup V$ een element van V zijn. In onderdeel (a) hebben we bewezen dat $\sup V = 4$. Omdat $3 \cdot 4 = 12 \not< 12$ volgt er dat $4 \notin V$ en bijgevolg $\max V$ bestaat niet.

5. Zij $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ een convergente rij in $\mathbb{R}$, met limiet x . Kies $\varepsilon > 0$ willekeurig. Omdat de rij convergent is is er een index $N \geq 0$ zodanig dat $|x_n - x| < \frac{1}{2}\varepsilon$ voor alle $n \geq N$. Voor alle $n \geq N$ geldt dan

$$|x_n - x_N| = |(x_n - x) + (x - x_N)| \leq |x_n - x| + |x - x_N| < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon.$$

6. (a) Zij $x \in [0, \frac{1}{2}]$ willekeurig; we moeten laten zien dat $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$. Omdat $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ geldt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0 = f(x).$$

(b) Beschouw voor elke $n \in \mathbb{N}$ de verzameling $A_n = \{|x^n - 0| : x \in [0, \frac{1}{2}]\}$. Elke f_n is stijgend dus geldt $\sup A_n = (\frac{1}{2})^n$. Omdat $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{2})^n = 0$ kunnen we concluderen dat de functierij $\{f_n\}_{n \geq 1}$ uniform naar f convergeert.

7. Het is makkelijk in te zien dat $\sim$ reflexief is. Immers, voor alle $a \in \mathbb{Z}$ geldt $a - a = 0$ en $5 \mid 0$, dus $a \sim a$.
 Neem nu aan dat $a \sim b$, dat wil zeggen, $5 \mid (a - b)$. Maar dan ook $5 \mid (b - a)$ en dus $b \sim a$. We hebben aangetoond dat $\sim$ symmetrisch is.
 Om ook de transitiviteit te bewijzen laat $a, b, c \in \mathbb{Z}$ zijn met $a \sim b$ en $b \sim c$. Dan $5 \mid (a - b)$ en $5 \mid (b - c)$, en omdat $(a - b) + (b - c) = a - c$ volgt er $5 \mid (a - c)$. Maar $5 \mid (a - c)$ betekent $a \sim c$; We hebben bewezen dat $\sim$ een equivalentierelatie is.

8. (a) Omdat $c_1 = 1 - i$ en $c_2 = 2i$ nulpunten van een reëel polynoom $p(x)$ zijn moet $p(x)$ ook $\overline{c_1} = 1 + i$ en $\overline{c_2} = -2i$ als nulpunten hebben. Verder is gegeven dat $p(x)$ een monisch polynoom is. We kunnen dus schrijven

$$\begin{aligned} p(x) &= (x - c_1) \cdot (x - \overline{c_1}) \cdot (x - c_2) \cdot (x - \overline{c_2}) \\ &= (x - 1 + i) \cdot (x - 1 - i) \cdot (x - 2i) \cdot (x + 2i) \\ &= (x^2 - 2x + 2) \cdot (x^2 + 4) \\ &= x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 8x + 8. \end{aligned}$$

(b) Uit onderdeel (a) volgt dat $p(x) = (x - 1 + i) \cdot (x - 1 - i) \cdot (x - 2i) \cdot (x + 2i)$; de polynomen in het product zijn eerstegraads en dus irreducibel.

(c) Uit onderdeel (a) volgt dat $p(x) = (x^2 - 2x + 2) \cdot (x^2 + 4)$. Beide polynomen in het product zijn irreducibele reële polynomen omdat ze tweedegraads zijn en geen reële nulpunten hebben.

9. Omdat f continu in p is en $f(p) > 0$ bestaat voor $\varepsilon = \frac{f(p)}{2} > 0$ een $\delta > 0$ zó dat $|f(x) - f(p)| < \varepsilon$ voor alle $x \in (a, b)$ met $|x - p| < \delta$. Neem $(c, d) = (a, b) \cap (p - \delta, p + \delta)$, dan voor elke $x \in (c, d)$ geldt $|x - p| < \delta$ en dus $|f(x) - f(p)| < \varepsilon = \frac{f(p)}{2}$. Hieruit volgt

$$0 < \frac{1}{2}f(p) < f(x) < \frac{3}{2}f(p).$$