

- (9) 1. Bewijs met behulp van volledige inductie dat voor alle natuurlijke getallen $n \geq 0$ geldt

$$1 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2.$$

- (9) 2. Los de volgende vergelijking op

$$11x + 16 \equiv 20 \pmod{36}.$$

3. Laat $(G, \star)$ een groep zijn.

- (5) (a) Bewijs dat er precies één eenheidselement van G bestaat.

- (4) (b) Bewijs dat elke $y \in G$ precies één inverse heeft.

4. Beschouw een gelijkbenige maar niet gelijkzijdige driehoek.

- (5) (a) Vind alle symmetriën van de driehoek en beschrijf de groepsoperatie (samenstelling van symmetriën) met behulp van een tabel.

- (2) (b) Bewijs of weerleg: de gevonden symmetriegroep is cyclisch.

- (2) (c) Bewijs of weerleg: de gevonden symmetriegroep is commutatief.

- (9) 5. Geef een voorbeeld van verzamelingen A en B en een afbeelding $f : A \rightarrow B$ zó dat f surjectief maar niet injectief is en bewijs dat het voorbeeld de gewenste eigenschappen heeft.

6. Beschouw het polynoom $p(x) = x^4 + 1$.

- (4) (a) Schrijf $p(x)$ als product van irreducibele complexe polynomen.

- (4) (b) Schrijf $p(x)$ als product van irreducibele reële polynomen.

- (1) (c) Zijn de ontbindingen gevonden in onderdelen (a) en (b) uniek? Geef duidelijke argumenten.

De waardering voor elke vraag staat in de kantlijn; het cijfer wordt berekend volgens de formule

$$\text{Cijfer} = \frac{\text{Totaal} + 6}{6}.$$

EINDE