

DEELTENTAMEN Mechanica en Relativiteitstheorie (TN1612WI)

Docent: M.J. Tummers

Datum: 17 april 2013

Tijd: 9.00-12.00 uur

Het tentamen bestaat uit vier opgaven

De uitdrukking voor de snelheid in poolcoördinaten is $\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$.

De uitdrukking voor de versnelling in poolcoördinaten is $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta$.

Opgave 1:

Een deeltje met massa m kan langs een rechte lijn bewegen (stel de x -as) onder invloed van een kracht F_x . Naast F_x zijn er geen andere krachten werkzaam. De kracht F_x is een conserverende kracht met potentiaal U gegeven door:

$$U = \frac{1}{2}ax^2 - \frac{1}{4}bx^4.$$

Hierin zijn a en b positieve constanten.

- Wat is de eenheid van constante a en van constante b ?
- Voor welke waarden van x kan het deeltje in evenwicht zijn? Bepaal of deze evenwichtsstanden stabiel dan wel instabiel zijn.

Stel dat het deeltje op $t = 0$ zich bevindt in $x = 0$ en op dat moment snelheid $V_0 (> 0)$ heeft.

- Hoe groot moet V_0 zijn opdat het deeltje $x = 2\sqrt{a/b}$ kan bereiken?

Stel nu dat het deeltje op $t = 0$ vanuit $x = 0$ wordt weggeschoten met een snelheid $V_1 (> 0)$ waarbij V_1 *veel kleiner* is dan de snelheid V_0 bepaald bij onderdeel c.

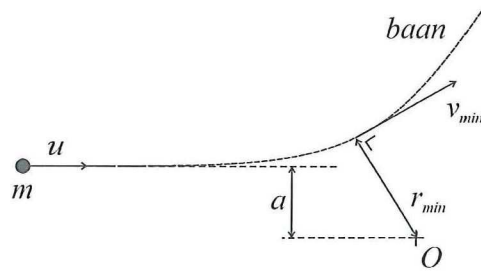
- Hoe luidt voor dat geval de bewegingsvergelijking van het deeltje? Bepaal vervolgens de positie van het deeltje als functie van de tijd.

Opgave 2:

Een deeltje met massa m beweegt in een *afstotend* centraal krachtveld

$$F = \frac{A}{r^2},$$

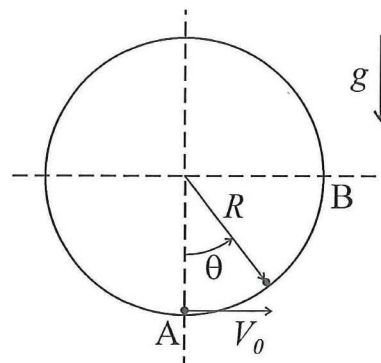
waarin A een positieve constante is, en r is de afstand tussen het deeltje en het centrum O van het krachtveld. Stel dat het deeltje op een zeer grote afstand van het centrum ("op oneindig") met snelheid $\vec{u}$ beweegt waarbij de afstand tussen de werklijn van de snelheidsvector van het deeltje (op oneindig) en het centrum O gelijk is aan a . Het deeltje beweegt dan in een gekromde baan langs het centrum O , zie de figuur.



- Wat is de eenheid van de constante A ? Geef een uitdrukking voor de potentiaal U voor dit krachtveld.
- Leg uit waarom het impulsmoment van het deeltje ten opzichte van het centrum O constant is tijdens de beweging van het deeltje door het krachtveld.
- Bereken de minimale afstand r_{min} en de bijbehorende snelheid v_{min} .

Opgave 3:

Langs de binnenzijde van een cirkelvormige baan met straal R kan een deeltje met massa m wrijvingsloos bewegen. De baan is opgesteld in een vertikaal vlak. De gravitatieversnelling (valversnelling) wordt aangegeven met g . Het deeltje wordt vanuit het onderste punt van de baan (punt A) weggeschoten met snelheid V_0 .

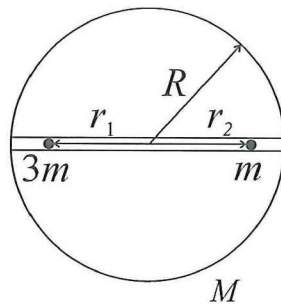


De positie van het deeltje kan worden vastgelegd met een hoek θ gemeten vanuit de vertikaal, zie figuur.

- Welke krachten werken er op het deeltje? Geef ook de richting van deze krachten aan in een figuur.
- Bereken de snelheid van het deeltje in punt B ($\theta=90^\circ$) als gegeven is dat $V_0 = \sqrt{5gR}$.
- Bereken de waarde van θ waarvoor het deeltje het contact met de baan verliest. Wat is op dat moment de snelheid van het deeltje?

Opgave 4:

Door het middelpunt van de aarde is een rechte tunnel gegraven. Door deze tunnel kunnen deeltjes wrijvingsloos bewegen. De positie van een deeltje in de tunnel kan worden vastgelegd met een coördinaat r gemeten vanuit het middelpunt van de aarde, zie de figuur. Op $t=0$ laat men aan het ene uiteinde van de tunnel een deeltje 1 met massa $3m$ vanuit rust in de tunnel vallen. Op hetzelfde moment laat men aan het andere uiteinde een deeltje 2 met massa m (ook vanuit rust) in de tunnel vallen. Beschouw de aarde als een homogene bol met straal R en massa M . De gravitatieconstante wordt aangeduid met $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N/kg}^2$.



- Geef een uitdrukking voor de gravitatiekracht op elk van de deeltjes. (De gravitatie tussen de twee deeltjes onderling is uiteraard verwaarloosbaar klein.)
- Bereken de snelheid van beide deeltjes direct *voor* de botsing.
- Bereken de snelheid van de deeltjes direct *na* de botsing voor het geval dat de botsing elastisch is.
- Bereken de snelheid van deeltje 2 (met massa m) op het moment dat het de tunnel weer verlaat.
- Ontsnapt deeltje 2 aan het gravitatieveld van de aarde? Bereken daartoe de ontsnappingssnelheid van een deeltje aan het aardoppervlak.