

Oefening: “Ruimtepuin”

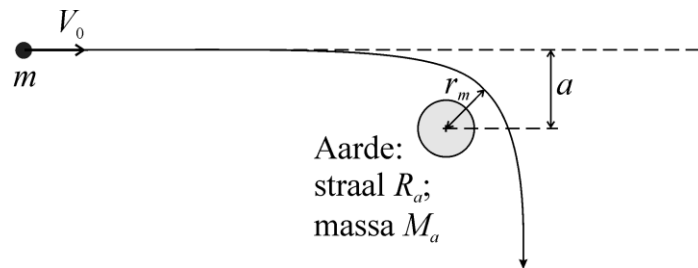
Een stuk ruimtepuin (op te vatten als een deeltje) met massa m bevindt zich op zeer grote afstand van de aarde, en beweegt dan met snelheid V_0 t.o.v. de (stilstaande) aarde. Een eerste meting door een observatiestation op aarde toont aan dat de snelheidsvector van het puin precies is gericht naar het midden van de aarde. De aarde heeft massa M_a , straal R_a , en de gravitatieconstante is $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2 \text{ kg}^{-2}$.

- Bereken de snelheid waarmee het ruimtepuin inslaat op het aardoppervlak.
- Stel dat de botsing tussen het puin en de aarde volledig inelastisch is. Geef een uitdrukking voor de snelheidsverandering van de aarde direct na de botsing.

Enige tijd later wordt door het observatiestation een nauwkeuriger meting gedaan. Het blijkt dat het ruimtepuin op zeer grote afstand van de aarde wel een snelheid V_0 heeft, maar de snelheidsvector is niet precies gericht naar het middelpunt van de aarde. In plaats daarvan is de afstand tussen het middelpunt van de aarde en de werklijn van de snelheidsvector gelijk aan a , zoals aangegeven in de figuur. Hierdoor is het mogelijk dat het ruimtepuin de aarde zal missen.

- Bereken het impulsmoment van het ruimtepuin t.o.v. het middelpunt van de aarde. Waarom is het impulsmoment constant tijdens de beweging van het ruimtepuin in het gravitatieveld van de aarde? Is de mechanische energie behouden tijdens de beweging? (Beargumenteer het antwoord.)

Bereken de minimale afstand, r_m , tussen het middelpunt van de aarde en het ruimtepuin. Wat is de snelheid van het ruimtepuin in geval van minimale afstand?



Antwoord:

- Voor de gravitatiekracht geldt: $F = \frac{-GM_a m}{r^2}$, waarbij r de afstand tussen het puin (deeltje) en het middelpunt van de aarde is. Dit levert de potentiaal:

$$U = \frac{-GM_a m}{r}, \text{ waarbij de potentiaal gelijk 0 is gekozen voor } r \rightarrow \infty, \text{ d.w.z.}$$

“op zeer grote afstand.” Voor de arbeid die verricht wordt door de gravitatie tot aan de inslag op het aardoppervlak geldt:

$$\frac{1}{2} m v_{in}^2 - \frac{1}{2} m V_0^2 = U(r = \infty) - U(r = R_a) = \frac{GM_a m}{R_a}. \text{ Dit levert voor de snelheid}$$

$$\text{bij inslag op het oppervlak: } v_{in} = \left(V_0^2 + \frac{2GM_a}{R_a} \right)^{1/2}.$$

- b) Bij een volledig inelastische botsing geldt behoud van impuls:
 $mv_{in} = (m + M_a)U_{na}$, waarbij U_{na} de snelheid van de aarde (plus puin) na de botsing is. Dit levert: $U_{na} = \frac{m}{m + M_a} \left(V_0^2 + \frac{2GM_a}{R_a} \right)^{1/2}$.
- c) Het impulsmoment van het ruimtepuin t.o.v. het middelpunt van de aarde is $mV_0 a$.
- d) Noem de minimale afstand r_m en de bijbehorende snelheid v_m . In een centraal krachtveld is het impulsmoment t.o.v. het middelpunt van de aarde constant, omdat de gravitatie altijd in de richting van het middelpunt wijst. De wet van behoud van mechanische energie geldt omdat gravitatie een conservatieve kracht is. Uit het behoud van impulsmoment volgt:

$$mv_m r_m = mV_0 a \Rightarrow v_m r_m = V_0 a \quad (1)$$

De wet van behoud van mechanische energie levert:

$$\frac{1}{2}mv_m^2 - \frac{GM_a m}{r_m} = \frac{1}{2}mV_0^2 \quad (2)$$

Oplossen levert: $r_m = \frac{-GM_a m}{mv_0^2} + \sqrt{\frac{(GM_a m)^2}{m^2 v_0^4} + a^2}$ en $v_m = \frac{a}{r_m} V_0$.

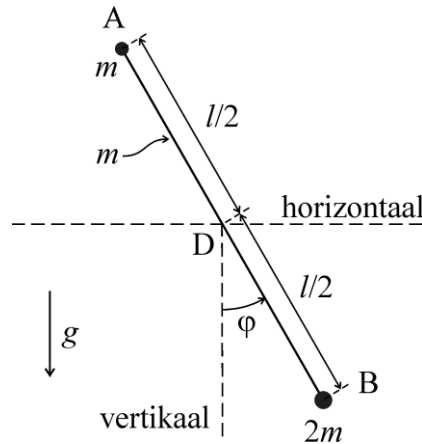
Oefening: “Halter slinger”

Een homogene staaf met massa m en lengte l kan draaien om een horizontale as door D die zich op een afstand $l/2$ vanaf een uiteinde bevindt. De staaf verbindt twee deeltjes A (met massa m) en B (met massa $2m$). Het geheel wordt aangeduid met “halter”.

- Bereken de afstand tussen het massamiddelpunt van de halter en de as door D;
- Bereken het traagheidsmoment van de halter t.o.v. de as door D.

Er is zwaartekracht, en de gravitatieversnelling wordt aangegeven met g . Op een willekeurig tijdstip kan de stand van de halter kan worden vastgelegd met een hoek φ gemeten vanuit de vertikaal. Stel dat de halter op het tijdstip $t=0$ wordt losgelaten vanuit een horizontale stand ($\varphi = \pi/2$) en rust ($\dot{\varphi} = 0$). Onder werking van de zwaartekracht zal de halter gaan slingeren. Neem aan dat er geen wrijving is.

- Hoe groot is de hoeksnelheid $\dot{\varphi}$ op het tijdstip dat de halter door de vertikale stand beweegt?
- Stel een bewegingsvergelijking op, en bepaal de periode van de slingerbeweging voor kleine waarden van de hoek φ .



Antwoord:

- a) Als x een coördinaat is langs de staaf, gemeten vanuit de as D, en positief in de richting van deeltje B, dan volgt voor het massamiddelpunt:

$$x_{MM} = \frac{-ml/2 + 2ml/2}{4m} = l/8.$$

- b) Voor het berekenen van het traagheidsmoment van de halter t.o.v. as D kunnen de bijdragen van de staaf en de twee deeltjes worden opgeteld. Dit levert:

$$I_{\text{halter}} = I_{\text{staaf}} + I_{\text{deeltjeA}} + I_{\text{deeltjeB}} = \frac{1}{12}ml^2 + m(l/2)^2 + 2m(l/2)^2 = \frac{5}{6}ml^2.$$

- c) Dit kan worden afgeleid uit de wet van behoud van mechanische energie. Er geldt: $U + T = \text{constant}$ met $U = -\frac{1}{2}mgl \cos \varphi$ en $T = \frac{1}{2}I_{\text{halter}}\dot{\varphi}^2 = \frac{5}{12}ml^2\dot{\varphi}^2$. Dit levert: $-\frac{1}{2}mgl \cos \varphi + \frac{5}{12}ml^2\dot{\varphi}^2 = \text{constant} = 0$. (De waarde van de constante volgt uit de beginvoorwaarde $t = 0, \varphi = \pi/2, \dot{\varphi} = 0$.) Dit levert voor de hoeksnelheid

$$\text{als } \varphi = 0 : \dot{\varphi} = \sqrt{\frac{6g}{5l}}.$$

- d) Differentiëren van $T+U=\text{constant}$ naar de tijd levert de bewegingsvergelijking:

$$\ddot{\varphi} + \frac{3g}{5l} \sin \varphi = 0. \quad (\text{Dit kan ook worden gevonden door de impulsmomentstelling toe te passen t.o.v. het draaipunt D.})$$

Voor kleine hoeken kan de

bewegingsvergelijking benaderd worden met: $\ddot{\varphi} + \frac{3g}{5l} \varphi = 0$. Met de algemene

oplossing $\varphi = e^{-\lambda t}$ volgen de eigenwaarden $\lambda = \pm i\sqrt{\frac{3g}{5l}}$. De zuiver imaginaire

eigenwaarden geven aanleiding tot een harmonische beweging met periode:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{5l}{3g}} .$$

Opgave 3:

- 1) Waarnemers S en S' zijn beide inertiaalwaarnemers. De relatieve snelheid tussen S en S' is $V = \frac{4}{5}c$. Beide waarnemers kiezen hun x-as, resp x'-as parallel aan V. Op tijdstip $t=0$ bevinden beide waarnemers zich op dezelfde positie en besluiten ze hun klokken te synchroniseren.

Volgens S vindt er op $t=0$ een explosie plaats in een sterrenstelsel, dat zich op dat moment op positie $(x,y,z)=(L,0,0)$ bevindt. Hierbij komt Röntgenstraling vrij waarbij fotonen richting S uitgezonden worden. Het sterrenstelsel beweegt met snelheid $U = \frac{12}{13}c$ van S af, met U parallel aan de x-as (U en V wijzen allebei in de positieve x-richting). In het stelsel van het sterrenstelsel hebben de uitgezonden fotonen een energie E'' .

Beantwoord vragen (a) en (b) vanuit het stelsel van S.

- Bepaal wanneer S fotonen van deze explosie ontvangt.
- Bepaal wanneer volgens S waarnemer S' de fotonen ontvangt. Bepaal tevens op welke positie S' zich dan volgens S bevindt.

Beantwoord vragen (c) en (d) in de coördinaten van het stelsel van S'.

- Bepaal op welk tijdstip en welke positie volgens S' de explosie plaats vond.
- Bepaal wanneer S' fotonen van deze explosie ontvangt.

- Bepaal welke fotonenergie S en S' detecteren.

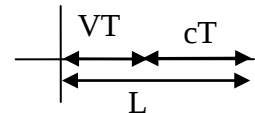
Antwoord:

- 1) a) S ontvangt op $(ct, x) = (L, 0)$

- b) op T ontvangt S', volgens S, de fotonen. Dan is S' op positie VT en heeft het licht een afstand cT afgelegd, waarbij geldt:

$$L = VT + cT \rightarrow T = \frac{L}{V+c} \rightarrow x = VT = \frac{\frac{4}{5}c}{1+\frac{4}{5}} L = \frac{4}{9}L$$

$$\text{Dus } (ct, x) = \left(\frac{5}{9}L, \frac{4}{9}L\right)$$



$$\text{c) LT } \left\{ \begin{array}{l} ct' = \gamma ct - \gamma \frac{v}{c} x \\ x' = \gamma x - \gamma \frac{v}{c} ct \end{array} \right\} \text{ met } \gamma = \frac{5}{3} \rightarrow \text{Explosie volgens S: } (ct, x) = (0, L) \rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} ct' = \gamma ct - \gamma \frac{v}{c} x = -\frac{5}{3} \frac{4}{5} L = -\frac{4}{3} L \\ x' = \gamma x - \gamma \frac{v}{c} ct = \frac{5}{3} L \end{array} \right\}$$

d) fotonen moeten in S' dus een afstand $\frac{5}{3}L$ afleggen. Daar doen ze $\frac{5}{3}\frac{L}{c}$ over. Dus ze

worden gedetecteerd op $ct' = -\frac{4}{3}L + \frac{5}{3}L = \frac{1}{3}L$

$$\text{of via LT: } \left\{ \begin{array}{l} ct' = \gamma ct - \gamma \frac{v}{c} x = \frac{5}{3} \frac{5}{9} L - \frac{5}{3} \frac{4}{5} \frac{4}{9} L = \frac{1}{3} L \\ x' = \gamma x - \gamma \frac{v}{c} ct = \frac{5}{3} \frac{4}{9} L - \frac{5}{3} \frac{4}{5} \frac{5}{9} L = 0 \text{ uiteraard} \end{array} \right\}$$

e) in S beweegt het sterrenstelsel met snelheid U. De viervector $P^\mu = (\frac{E''}{c}, \frac{E''}{c}, 0, 0)$

transformeert volgens LT:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{E}{c} = \gamma_U \frac{E''}{c} - \gamma_U \frac{U}{c} \frac{E''}{c} \\ \frac{E}{c} = \gamma_U \frac{E''}{c} - \gamma_U \frac{U}{c} \frac{E''}{c} \end{array} \right\} \rightarrow \frac{E}{c} = \frac{5}{3} \frac{E''}{c} - \frac{5}{3} \frac{12}{13} \frac{E''}{c} = \frac{5}{39} \frac{E''}{c}$$

in S' beweegt het stelsel veel langzamer:

$$u_{x'}' = \frac{u_x - V}{1 - \frac{Vu_x}{c^2}} = \frac{\frac{12}{13} - \frac{4}{5}}{1 - \frac{12}{13} \frac{4}{5}} c = \frac{8}{17} c \rightarrow \gamma_{U'} = 1.1333$$

$$\text{dus } \frac{E'}{c} = \gamma_{U'} \frac{E''}{c} - \gamma_{U'} \frac{U'}{c} \frac{E''}{c} \rightarrow \frac{E}{c} = 1.113 \frac{E''}{c} - 1.113 \frac{8}{17} \frac{E''}{c} = \frac{3}{5} \frac{E''}{c}$$

Opgave 4:

Twee deeltjes met (rust)massa m en 3m botsen met relativistische snelheid -3v en v op elkaar (zie figuur). Na de botsing is er nog maar een deeltje over.



Bepaal de (rust)massa en de snelheid van het deeltje na de botsing.

$$\text{Gegeven: } \frac{v}{c} = \frac{1}{5}.$$

Antwoord:

$$\text{deeltje: } P_m^\mu = (m\gamma c, m\gamma v)$$

$$\text{vierimpulsbehoud: } \left. \begin{array}{l} 3m\gamma(v)c + m\gamma(3v)c = M\gamma(u)c \\ 3m\gamma(v)v - m\gamma(3v)3v = M\gamma(u)u \end{array} \right\} \rightarrow \frac{u}{c} = \frac{3\gamma(v) - 3\gamma(3v)}{3\gamma(v) + \gamma(3v)} \frac{v}{c} = -0.16 \frac{v}{c}$$

$$M = \frac{3\gamma(v) + \gamma(3v)}{\gamma(u)} m = 4.26m$$