

Tentamen Analyse 2, wi1601

21 juni 2013, 9.00-12.00

-
- Een rekenmachine of formuleblad is niet toegestaan.
 - Ieder antwoord dient gemotiveerd te worden met een (korte) berekening, redenering of verwijzing naar de theorie.
 - De punten per opgave staan in de kantlijn. Het cijfer wordt bepaald met de formule $\frac{\text{totaal} + 10}{10}$.
-

- (5) 1. a) Zij $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Toon aan dat

$$\|\mathbf{x}\| \leq |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|.$$

- (3) b) Maak de volgende definitie af.

Zij $D \subset \mathbb{R}^n$ en $\mathbf{a} \in D$. De functie $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ heet *continu in a* als ...

De functie $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ is gegeven door

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{|x| + |y|} & \text{als } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{als } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- (7) c) Onderzoek of g continu is in $(0, 0)$.

Hint: Gebruik onderdeel a.

- (5) d) Is g differentieerbaar in $(0, 0)$ naar $\mathbf{v} = (1, 1)$? (Ofwel, bestaat $D_{\mathbf{v}}g(0, 0)$?)

Hint: $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(t)}{t} = 1$.

2. We noemen een functie $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ *harmonisch* als

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) = 0, \quad \text{voor alle } (a, b) \in \mathbb{R}^2.$$

- (5) a) De functies $u, v \in C^2(\mathbb{R}^2)$ voldoen aan

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{en} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Toon aan dat u en v harmonisch zijn.

- (10) b) Laat $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ een harmonische functie zijn. Definieer

$$u(x, y) = x^2 - y^2, \quad v(x, y) = 2xy, \quad \text{en} \quad g(x, y) = f(u(x, y), v(x, y)).$$

Toon aan dat g harmonisch is.

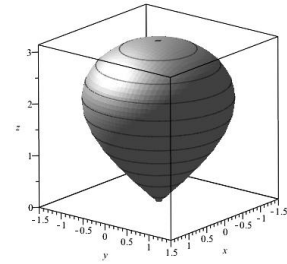
ZIE OMMEZIJDE VOOR VERVOLG

- (15) 3. De functie $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ is gegeven door

$$f(x, y) = xy(x^2 + y^2 - 1)$$

Bepaalde plaats, aard (minimum/maximum, lokaal/globaal) en grootte van de extremen van f .

4. Het gebied $G \subset \mathbb{R}^3$ is het omwentelingslichaam dat we krijgen door de kromme in het xz -vlak gegeven door $x = \sqrt{z \sin(z)}$, $0 \leq z \leq \pi$, om de z -as te draaien. Het oppervlak $S \subset \mathbb{R}^3$ is de rand van G .



- (10) a) Bereken $\text{Vol}(G)$.
- (10) b) Geef een parametervoorstelling van het raakvlak aan S in het punt $(0, \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \frac{\pi}{2})$.

5. Het vectorveld $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ is gegeven door

$$\mathbf{F}(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y)) = \left(\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{-x}{x^2 + y^2} \right).$$

- (4) a) Bereken $\frac{\partial F_2}{\partial x}$ en $\frac{\partial F_1}{\partial y}$.
- (8) b) De kromme $C_1 \subset \mathbb{R}^2$ wordt geparametriseerd door $\mathbf{x}(t) = (\tan^2(t/4), \cos(2t) \cos(t))$, $0 \leq t \leq \pi$, en heeft $\mathbf{x}(0) = (0, 1)$ als beginpunt.

Bereken $\int_{C_1} \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\tau} \rangle ds$.

Hint: $\frac{d}{dt} \arctan(t) = \frac{1}{1+t^2}$.

- (3) c) Formuleer de stelling van Green (inclusief alle voorwaarden).

- (5) d) De kromme $C_2 \subset \mathbb{R}^2$ is gegeven door $x^4 + y^4 = 16$, en is tegen de wijzers van klok in georiënteerd.

Bereken $\int_{C_2} \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\tau} \rangle ds$ met behulp van de stelling van Green.

