

Uitwerkingen Tentamen Analyse 2, wi1601

21 juni 2013, 9.00-12.00

1. a) Er geldt

$$\begin{aligned}\left(|x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|\right)^2 &= |x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2 + 2(|x_1x_2| + |x_1x_3| + \dots + |x_{n-1}x_n|) \\ &\leq |x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2 = \|\mathbf{x}\|^2.\end{aligned}$$

Neem nu aan beide kant de wortel.

b) Zie dictaat.

c) Zij $\varepsilon > 0$. Kies $\delta = \varepsilon$. Als $\|(x, y)\| < \delta$, dan

$$\begin{aligned}|g(x, y) - g(0, 0)| &= \frac{|\sin(xy)|}{|x| + |y|} \\ &\leq \frac{|\sin(xy)|}{\|(x, y)\|} && \text{gebruik onderdeel a} \\ &\leq \frac{|xy|}{\|(x, y)\|} && \text{gebruik } |\sin(t)| \leq |t| \\ &\leq \frac{\|(x, y)\|^2}{\|(x, y)\|} && \text{gebruik } \max\{|x|, |y|\} \leq \|(x, y)\| \\ &= \|(x, y)\| < \delta = \varepsilon,\end{aligned}$$

dus g is continu in $(0, 0)$.

d) Met de definitie van $D_{\mathbf{v}}g(0, 0)$:

$$D_{\mathbf{v}}g(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h\mathbf{v}) - g(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h^2)}{2h|h|} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{2|h|} \frac{\sin(h^2)}{h^2}.$$

Aangezien $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{|h|}$ niet bestaat, bestaat $D_{\mathbf{v}}g(0, 0)$ ook niet.

2. a) Omdat $v \in C^2(\mathbb{R}^2)$ geldt er $\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$, dus

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

dus u is harmonisch.

Op dezelfde manier,

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y^2},$$

dus v is ook harmonisch.

b) Met de kettingregel,

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = 2x \frac{\partial f}{\partial u} + 2y \frac{\partial f}{\partial v}.$$

We differentiëren nogmaals naar x . Met de kettingregel en de productregel,

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = 2x \left(2x \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 2y \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} \right) + 2 \frac{\partial f}{\partial u} + 2y \left(2x \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + 2y \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \right).$$

Nu de partiële afgeleiden naar y :

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = -2y \frac{\partial f}{\partial u} + 2x \frac{\partial f}{\partial v}, \\ \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} &= -2y \left(-2y \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 2x \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} \right) - 2 \frac{\partial f}{\partial u} + 2x \left(-2y \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + 2x \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \right). \end{aligned}$$

Optellen geeft nu

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \right) (4x^2 + 4y^2) = 0,$$

omdat f harmonisch is.

3. (Zie opgave 15e van §2.6) We bepalen eerst de stationaire punten van $f(x, y) = x^3y + xy^3 - xy$;

$$f_x(x, y) = 3x^2y + y^3 - y = y(3x^2 + y^2 - 1), \quad f_y(x, y) = x(3y^2 + x^2 - 1).$$

Nu volgt:

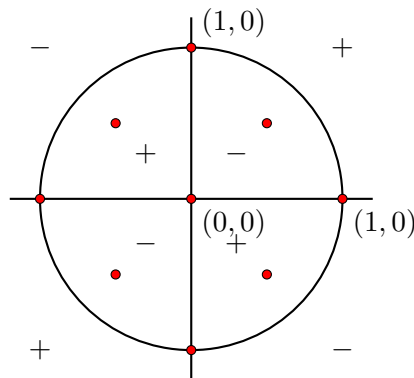
$$\begin{aligned} f_x(x, y) = 0 &\Leftrightarrow y = 0 \text{ of } 3x^2 + y^2 - 1 = 0; \\ f_y(x, y) = 0 &\Leftrightarrow x = 0 \text{ of } x^2 + 3y^2 - 1 = 0. \end{aligned}$$

Dit geeft de stationaire punten $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(0, -1)$, $(1, 0)$, $(-1, 0)$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ en $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.

We maken nu een tekenoverzicht van f . Er geldt

$$f(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ of } y = 0 \text{ of } x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

Dit geeft het volgende tekenoverzicht:



We lezen nu af: $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(0, -1)$, $(1, 0)$ en $(-1, 0)$ zijn zadelpunten. $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ en $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ zijn lokale maxima met grootte $\frac{1}{8}$, en $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ en $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ zijn lokale minima met grootte $-\frac{1}{8}$.

Aangezien $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x, 1) = \infty$ en $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x, 1) = -\infty$, zijn er geen globaal minimum en maximum.

4. a) We schrijven G als $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq \pi, (x, y) \in D_z\}$ met D_z de cirkelschijf met straal $\sqrt{z \sin z}$; $D_z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq z \sin z\}$. Dan

$$\begin{aligned} \text{Vol}(G) &= \iiint_G d(x, y, z) = \int_0^\pi \iint_{D_z} d(x, y) dz = \int_0^\pi \text{Opp}(D_z) dz = \int_0^\pi \pi z \sin z dz \\ &= \pi \left[-z \cos z \right]_0^\pi + \pi \int_0^\pi \cos z dz = \pi^2. \end{aligned}$$

- b) Een parametervoorstelling van S is

$$\mathbf{X}(\varphi, z) = (\cos \varphi \sqrt{z \sin z}, \sin \varphi \sqrt{z \sin z}, z)$$

op $\{(\varphi, z) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq z \leq \pi\}$. Dan

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_\varphi(\varphi, z) &= (-\sin \varphi \sqrt{z \sin z}, \cos \varphi \sqrt{z \sin z}, 0), \\ \mathbf{X}_z(\varphi, z) &= \left(\frac{(\sin z + z \cos z) \cos \varphi}{2\sqrt{z \sin z}}, \frac{(\sin z + z \cos z) \sin \varphi}{2\sqrt{z \sin z}}, 1 \right). \end{aligned}$$

Een parametervoorstelling van het raakvlak in $(0, \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \frac{\pi}{2})$ is

$$(0, \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \frac{\pi}{2}) + s\mathbf{X}_\varphi(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) + t\mathbf{X}_z(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) = (0, \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \frac{\pi}{2}) + s(-\sqrt{\frac{\pi}{2}}, 0, 0) + t(0, \frac{1}{2\sqrt{\frac{\pi}{2}}}, 1),$$

met $s, t \in \mathbb{R}$.

5. a) Met de quotiëntregel:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial y} &= \frac{(x^2 + y^2) - y \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} &= -\frac{(x^2 + y^2) - x \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}. \end{aligned}$$

- b) Uit onderdeel a) volgt dat $\mathbf{F}$ conservatief is op $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. We zoeken een potentiaal f van $\mathbf{F}$. Er geldt $f_x = F_1 = \frac{1}{y} \frac{1}{1+(x/y)^2}$, dus

$$f(x, y) = \arctan(x/y) + c(y),$$

waarbij $c(y)$ onafhankelijk van x is. We differentiëren naar y :

$$f_y(x, y) = \frac{1}{1+(x/y)^2} \frac{-x}{y^2} + c'(y) = -\frac{x}{x^2 + y^2} + c'(y).$$

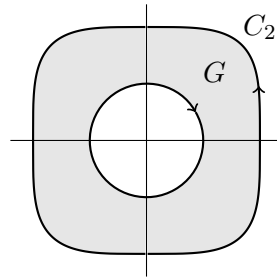
Dit moet gelijk zijn aan F_1 , dus we zien dat $c'(y) = 0$, ofwel c is een constante. Een potentiaal van $\mathbf{F}$ is dan $f(x, y) = \arctan(x/y)$.

De gevraagde integraal wordt nu

$$\int_{C_1} \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\tau} \rangle ds = f(1, -1) - f(0, 1) = \arctan(-1) - \arctan(0) = -\frac{\pi}{4}.$$

c) Zie dictaat.

d) We kunnen de stelling van Green niet direct toepassen, want $\mathbf{F}$ is niet continu differentieerbaar in $(0, 0)$. Noem $G = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \geq 1, x^4 + y^4 \leq 16\}$, dit is het gebied tussen de kromme C_2 en de eenheidscirkel. De rand van G is C_2 en de eenheidscirkel C .



Uit de stelling van Green volgt dan

$$\int_{C_2 \cup C} \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\tau} \rangle ds = \iint_G \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) d(x, y) = 0.$$

waarbij C met de wijzers van de klok mee is georiënteerd. We zien nu dat

$$\int_{C_2} \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\tau} \rangle ds = - \int_C \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\tau} \rangle ds.$$

Neem als parametrisering van C ,

$$\mathbf{x}(t) = (\cos t, \sin t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

(deze past *niet* bij de oriëntatie!), dan

$$\int_{C_2} \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\tau} \rangle ds = \int_0^{2\pi} \langle (\sin t, -\cos t), (-\sin t, \cos t) \rangle dt = - \int_0^{2\pi} dt = -2\pi.$$