

Uitwerkingen Tentamen Analyse 2, wi1601

donderdag 21 juni 2012, 14.00-17.00

1. a) $D \subset \mathbb{R}^n$ is open als ieder punt in D een inwendig punt van D is. $E \subset \mathbb{R}^n$ is gesloten als het complement $E^c = \mathbb{R}^n \setminus E$ open is.
- b) Stel $\mathbf{x} \notin E$. Dan geldt $\mathbf{x} \in E^c$. Omdat E^c open is, bestaat er $r > 0$ zo dat de open bol $B(\mathbf{x}; r)$ bevat is in E^c . Omdat $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{x}$, bestaat er een $N \in \mathbb{N}$ zo dat $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_n\| < r$ voor alle $n \geq N$. Dan volgt dat $\mathbf{x}_n \in B(\mathbf{x}; r) \subset E^c$, en dus $\mathbf{x}_n \notin E$ voor $n \geq N$. Dit geeft een tegenspraak. Conclusie: $\mathbf{x} \in E$.

2. a) $f_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0$.
Op dezelfde manier: $f_y(0, 0) = 0$.

b) Er geldt

$$f_x(x, y) = \frac{2}{3} \sqrt[3]{\frac{y^2}{x}}, \quad x \neq 0.$$

We zien dan direct dat

$$\lim_{y \rightarrow 0} f_x(y^2, y) = \frac{2}{3} \neq f_x(0, 0).$$

c) f is differentieerbaar in $(0, 0)$ als

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow (0,0)} \frac{|f(\mathbf{h}) - \langle \mathbf{h}, \nabla f(0, 0) \rangle|}{\|\mathbf{h}\|} = 0, \quad \mathbf{h} = (h_1, h_2).$$

We tonen aan dat dit zo is. Met $h_i^2 \leq \|\mathbf{h}\|^2$, $i = 1, 2$, volgt

$$\frac{|f(\mathbf{h}) - \langle \mathbf{h}, \nabla f(0, 0) \rangle|}{\|\mathbf{h}\|} = \frac{\sqrt[3]{h_1^2 h_2^2}}{\|\mathbf{h}\|} \leq \frac{\sqrt[3]{\|\mathbf{h}\|^2 \cdot \|\mathbf{h}\|^2}}{\|\mathbf{h}\|} = \|\mathbf{h}\|^{1/3}.$$

Hieruit volgt dat de limiet van de linkerkant inderdaad gelijk is aan 0 als $\mathbf{h} \rightarrow (0, 0)$.

3. We schrijven g als

$$\begin{aligned} g(\mathbf{x}) &= \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{x} - \mathbf{b}\|^2 + \|\mathbf{x} - \mathbf{c}\|^2 \\ &= (x_1 - a_1)^2 + (x_1 - b_1)^2 + (x_1 - c_1)^2 + \cdots + (x_3 - a_3)^2 + (x_3 - b_3)^2 + (x_3 - c_3)^2. \end{aligned}$$

Nu zien we dat

$$g_{x_i}(\mathbf{x}) = 2(x_i - a_i) + 2(x_i - b_i) + 2(x_i - c_i), \quad i = 1, 2, 3,$$

en dit is gelijk aan 0 als $x_i = \frac{1}{3}(a_i + b_i + c_i)$. De vergelijking $\nabla g(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ heeft dus precies één oplossing, namelijk

$$\mathbf{x}_0 = \frac{1}{3}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}).$$

Verder geldt er $g_{x_i x_i} = 6$ en $g_{x_i x_j} = 0$ als $i \neq j$, dus de matrix van Hesse is

$$H_g(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Deze is duidelijk positief definit, dus g heeft een lokaal minimum in $\mathbf{x}_0$ met grootte

$$g(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{9} (\|\mathbf{b} + \mathbf{c} - 2\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{a} + \mathbf{c} - 2\mathbf{b}\|^2 + \|\mathbf{a} + \mathbf{b} - 2\mathbf{c}\|^2).$$

Uit de omgekeerde driehoeksongelijkheid volgt

$$g(\mathbf{x}) \geq \|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{b}\|^2 + \|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{c}\|^2,$$

en dus $g(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$ als $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$. Aangezien er geen andere kandidaten zijn dan $\mathbf{x}_0$ waar g een minimum kan hebben, heeft g een globaal minimum in $\mathbf{x}_0$.

4. a) We passen de impliciete functie stelling toe. Definieer

$$f(x, y, z) = x^3 + xyz + z^2 - 1, \quad g(x, y, z) = \sin(\pi xy) + \cos(\pi yz) - 1,$$

dan is de functie $\mathbf{f} : \mathbb{R}^{1+2} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\mathbf{f} = (f, g)$, gelijk aan $\mathbf{0}$ in het punt $(x, y, z) = (1, 1, 0)$. Verder geldt er

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial (x, z)} = \begin{pmatrix} f_x & f_z \\ g_x & g_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x^2 + yz & xy + 2z \\ y\pi \cos(\pi xy) & -y\pi \sin(\pi yz) \end{pmatrix}$$

en in $(x, y, z) = (1, 1, 0)$ is de determinant hiervan

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -\pi & 0 \end{vmatrix} = \pi \neq 0,$$

dus volgens de impliciete functie stelling zijn x en z continu differentieerbare functies van y .

b) We bepalen $x'(y)$ en $z'(y)$ met impliciet differentiëren. Differentieer de vergelijkingen naar y ;

$$\begin{cases} 3x^2x' + x'yz + xz + xyz' + 2zz' = 0 \\ \pi \cos(\pi xy) \cdot (x'y + x) - \pi \sin(\pi yz) \cdot (yz' + z) = 0. \end{cases}$$

Met $(x, y, z) = (1, 1, 0)$ wordt dit

$$\begin{cases} 3x' + z' = 0 \\ -\pi(x' + 1) = 0 \end{cases}$$

en dus $x'(1) = -1$ en $z'(1) = 3$. Een parametervoorstelling van de raakvector wordt nu

$$(1, 1, 0) + t(-1, 1, 3), \quad t \in \mathbb{R}.$$

5. a) Er geldt

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{(xy+1) - xy}{(xy+1)^2} - \frac{(xy+1) - yx}{(xy+1)^2} = 0,$$

voor alle $(x, y) \in D$, dus $\mathbf{F}$ is conservatief.

b) We bepalen een potentiaal f . Uit $f_x = F_1 = \frac{y}{xy+1}$ volgt

$$f(x, y) = \ln(xy + 1) + c(y),$$

waarbij c onafhankelijk is van x . Neem hiervan de partiële afgeleide naar y , dan

$$f_y(x, y) = \frac{x}{xy + 1} + c'(y) = F_2,$$

en dus $c'(y) = 1$. We zien nu dat

$$f(x, y) = \ln(xy + 1) + y$$

een potentiaal is voor $\mathbf{F}$. De integraal wordt nu

$$\int_C \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\tau} \rangle ds = f(\mathbf{x}(1)) - f(\mathbf{x}(0)) = 1.$$

6. We parametriseren S als

$$\mathbf{X}(u, v) = (u, v, 1 + \frac{1}{4}u^2 - \frac{1}{2}v^2) \quad \text{op} \quad G = \left\{ (u, v) \mid \frac{1}{4}u^2 + v^2 \leq 1 \right\}.$$

Dan

$$X_u = (1, 0, \frac{1}{2}u), \quad X_v = (0, 1, -v),$$

en

$$X_u \times X_v = (-\frac{1}{2}u, v, 1) \quad \Rightarrow \quad \|X_u \times X_v\| = \sqrt{1 + \frac{1}{4}u^2 + v^2}.$$

Nu vinden we

$$\text{Opp}(S) = \iint_S d\Omega = \iint_G \sqrt{1 + \frac{1}{4}u^2 + v^2} d(u, v).$$

We gebruiken de transformatie $u = 2r \cos \varphi$, $v = r \sin \varphi$, met Jacobiaan

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(r, \varphi)} = \begin{vmatrix} 2 \cos \varphi & -2r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = 2r,$$

dan

$$\text{Opp}(S) = \int_0^{2\pi} \int_0^1 2r \sqrt{1 + r^2} dr d\varphi = 2\pi \left[\frac{2}{3} (1 + r^2)^{3/2} \right]_0^1 = \frac{4\pi}{3} (2\sqrt{2} - 1).$$

7. Er geldt

$$\text{rot}(\mathbf{F}) = \nabla \times \mathbf{F} = (1 - 1, 0, 2e^x - e^x) = (0, 0, e^x).$$

We passen nu twee keer de stelling van Stokes toe,

$$\iint_S \langle \text{rot}(\mathbf{F}), \mathbf{n} \rangle d\Omega = \int_{\partial S} \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\tau} \rangle ds = \iint_{S'} \langle \text{rot}(\mathbf{F}), \mathbf{n}' \rangle d\Omega,$$

waarbij de rand ∂S van boven gezien georiënteerd is tegen de wijzers van de klok in, en S' is “het grondvlak” van de tetraëder $PABC$ (met top P), dat wil zeggen de driehoek ABC . De oriëntatie van S' moet overeenkomen met die van ∂S , dus de eenheidsnormaal

$\mathbf{n}'$ heeft positieve z -coördinaat. S' ligt in het vlak met vergelijking $x + \frac{1}{2}y + z = 1$, en dit geeft als parametrisering van S ,

$$\mathbf{X}(u, v) = (u, v, 1 - u - \tfrac{1}{2}v), \quad \text{op} \quad G = \{(u, v) \mid 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 2 - 2u\}.$$

Dan

$$\mathbf{X}_u = (1, 0, -1), \quad \mathbf{X}_v = (0, 1, -\tfrac{1}{2}),$$

en

$$\mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_v = (1, \tfrac{1}{2}, 1).$$

De parametrisering $\mathbf{X}$ komt dus overeen met de oriëntatie, en dan

$$\begin{aligned} \iint_{S'} \langle \text{rot}(\mathbf{F}), \mathbf{n}' \rangle d\Omega &= \int_0^1 \int_0^{2-2u} \langle (0, 0, e^u), (1, \tfrac{1}{2}, 1) \rangle dv du \\ &= \int_0^1 \int_0^{2-2u} e^u dv du = 2 \int_0^1 (e^u - ue^u) du \\ &= 2 \left[2e^u - ue^u \right]_0^1 = 2e - 4. \end{aligned}$$