

Tentamen Analyse 2, wi1601
donderdag 31 augustus 2012, 9.00-12.00

-
- Een rekenmachine of formuleblad is niet toegestaan.
 - Ieder antwoord dient gemotiveerd te worden met een (korte) berekening, redenering of verwijzing naar de theorie.
-

- (4) 1. a) Maak de volgende definitie af.
Zij $D \subset \mathbb{R}^n$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ en $\mathbf{a} \in D$. De functie f is *continu* in $\mathbf{a}$ als ...
De functie $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ is lineair, dat wil zeggen $g(c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2) = c_1g(\mathbf{x}_1) + c_2g(\mathbf{x}_2)$ voor alle $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ en $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^n$.
- (6) b) Bewijs: er bestaat een constante $C \geq 0$ zo dat $|g(\mathbf{x})| \leq C\|\mathbf{x}\|$ voor alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.
- (5) c) Zij $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$. Toon aan dat g continu is in $\mathbf{a}$.

2. De functie $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ wordt gegeven door

$$\mathbf{f}(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y).$$

- (6) a) Bewijs met de inverse-functiestelling dat ieder punt $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ een omgeving heeft waarop $\mathbf{f}$ injectief is.
- (4) b) Is $\mathbf{f}$ injectief?

De functie $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ is continu differentieerbaar, en voldoet aan

$$\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v} = u, \quad \frac{\partial g}{\partial v} - \frac{\partial g}{\partial u} = v.$$

- (10) c) We definiëren $G : U \rightarrow \mathbb{R}$ door $G(x, y) = g(e^x \cos y, e^x \sin y)$. Toon aan:

$$\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = e^{2x}.$$

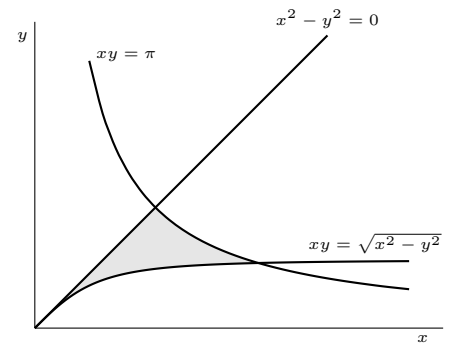
Zie ommezijde voor vervolg

(20)

3. Het gebied $G \subset \mathbb{R}^2$ wordt gegeven door

$$G = \left\{ (x, y) \mid x \geq 0, x^2 - y^2 \geq 0, \sqrt{x^2 - y^2} \leq xy \leq \pi \right\}.$$

Bereken $\iint_G (x^2 + y^2) \cos\left(\frac{x^2 - y^2}{xy}\right) d(x, y).$



(15)

4. K is de kromme in $\mathbb{R}^3$ met parametrisering

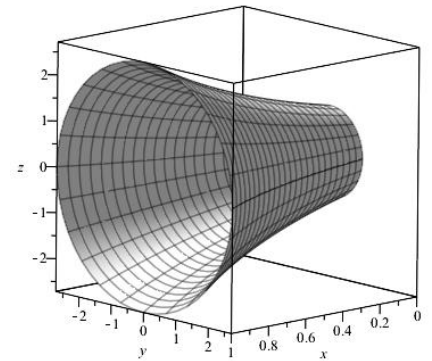
$$\mathbf{x}(t) = (t, 0, e^t), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Het oppervlak $S \subset \mathbb{R}^3$ is het omwentelingsoppervlak dat ontstaat door K om de x -as te wentelen.

Toon aan dat

$$\text{Opp}(S) = 2\pi \int_K z \, ds.$$

Je hoeft deze integraal niet uit te rekenen.



(20)

5. Het oppervlak $S \subset \mathbb{R}^3$ is het deel van de kegel $x^2 + y^2 = (4 - z)^2$ tussen de vlakken $z = 0$ en $z = 4$. S is georiënteerd volgens de eenheidsnormaal $\mathbf{n}$ met positieve z -coördinaat. Het vectorveld $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ is gegeven door $\mathbf{F}(x, y, z) = (yz, xz, 2 + xyz)$.

Bereken $\iint_S \langle \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle d\Omega$ met behulp van de stelling van Gauss.

