

Uitwerkingen Tentamen Analyse 2, wi1601

donderdag 31 augustus 2012, 9.00-12.00

1. a) Zij $D \subset \mathbb{R}^n$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ en $\mathbf{a} \in D$. De functie f is *continu* in $\mathbf{a}$ als voor alle $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat zodanig dat uit $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta$ volgt dat $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})| < \varepsilon$.

- b) Schrijf $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + \dots + x_n \mathbf{e}_n$, dan volgt uit Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} |g(\mathbf{x})| &= |x_1 g(\mathbf{e}_1) + \dots + x_n g(\mathbf{e}_n)| = |\langle (x_1, \dots, x_n), (g(\mathbf{e}_1), \dots, g(\mathbf{e}_n)) \rangle| \\ &\leq \|\mathbf{x}\| \|(g(\mathbf{e}_1), \dots, g(\mathbf{e}_n))\| = C \|\mathbf{x}\|. \end{aligned}$$

- c) Zij $\varepsilon > 0$. Kies $\delta = \frac{\varepsilon}{C+1}$. Als $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta$, dan volgt

$$|g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{a})| = |g(\mathbf{x} - \mathbf{a})| \leq C \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < C \frac{\varepsilon}{C+1} < \varepsilon.$$

2. a) $\mathbf{f}$ is continu differentieerbaar en

$$J\mathbf{f}(x, y) = \begin{vmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{vmatrix} = e^{2x} \neq 0,$$

voor alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, dus het gevraagde volgt uit de inverse-functiestelling.

- b) Nee, $\mathbf{f}(x, y) = \mathbf{f}(x, y + 2\pi)$.

- c) Noem $\mathbf{f}(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y) = (u, v)$. Met de kettingregel:

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial x} &= \frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = e^x \cos y \frac{\partial g}{\partial u} + e^x \sin y \frac{\partial g}{\partial v}, \\ \frac{\partial G}{\partial y} &= \frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = -e^x \sin y \frac{\partial g}{\partial u} + e^x \cos y \frac{\partial g}{\partial v}. \end{aligned}$$

Optellen geeft nu

$$\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = e^x \cos y \cdot u + e^x \sin y \cdot v = e^{2x} (\cos^2 y + \sin^2 y) = e^{2x}.$$

3. Gebruik de coördinaten tranformatie $(u, v) = \mathbf{g}(x, y) = (x^2 - y^2, xy)$, dan

$$J\mathbf{g}(x, y) = \begin{vmatrix} 2x & -2y \\ y & x \end{vmatrix} = 2x^2 + 2y^2,$$

en

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(G) &= \{(u, v) \mid u \geq 0, \sqrt{u} \leq v \leq \pi\} \\ &= \{(u, v) \mid 0 \leq v \leq \pi, 0 \leq u \leq v^2\}. \end{aligned}$$

De integraal wordt nu

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^\pi \int_0^{v^2} \cos\left(\frac{u}{v}\right) du dv &= \frac{1}{2} \int_0^\pi \left[v \sin\left(\frac{u}{v}\right) \right]_0^{v^2} dv = \frac{1}{2} \int_0^\pi v \sin v dv \\ &= \left[-\frac{1}{2} v \cos v \right]_0^\pi + \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos v dv = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

4. Merk op dat $\mathbf{x}'(t) = (1, 0, e^t)$ en $\|\mathbf{x}'(t)\| = \sqrt{1 + e^{2t}}$, dus

$$\int_K z ds = \int_0^1 e^t \sqrt{1 + e^{2t}} dt.$$

Een parametrisering van S is

$$\mathbf{y}(t, \phi) = (t, e^t \cos \phi, e^t \sin \phi), \quad \text{op } G = \{(t, \phi) \mid 0 \leq t \leq \phi, 0 \leq \phi \leq 2\pi\},$$

met

$$\mathbf{y}_t = (1, e^t \cos \phi, e^t \sin \phi), \quad \mathbf{y}_\phi = (0, -e^t \sin \phi, e^t \cos \phi).$$

Merk op dat $\mathbf{y}_t \perp \mathbf{y}_\phi$, dus

$$\|\mathbf{y}_t \times \mathbf{y}_\phi\| = \|\mathbf{y}_t\| \cdot \|\mathbf{y}_\phi\| = \sqrt{1 + e^{2t}} \cdot e^t.$$

Nu vinden we

$$\text{Opp}(S) = \iint_S d\Omega = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{1 + e^{2t}} \cdot e^t dt = 2\pi \int_0^1 \sqrt{1 + e^{2t}} \cdot e^t dt = 2\pi \int_K z ds.$$

De formule in deze opgave is trouwens waar voor alle krommen $(t, 0, f(t))$.

5. Noem $S' = \{(x, y, z) \mid z = 0, x^2 + y^2 \leq 16\}$, en laat $\mathbf{n}' = (0, 0, -1)$ de naar beneden gerichte eenheidsnormaal op S' zijn, dan

$$\iint_{S'} \langle \mathbf{F}, \mathbf{n}' \rangle d\Omega = \iint_{S'} \langle (0, 0, 2), (0, 0, -1) \rangle d\Omega = -2 \text{Opp}(S') = -32\pi.$$

Laat G het gebied zijn ingesloten door S en S' , dan volgt uit de stelling van Gauss dat

$$I = \iint_S \langle \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle d\Omega + \iint_{S'} \langle \mathbf{F}, \mathbf{n}' \rangle d\Omega = \iiint_G \text{div} \mathbf{F} d(x, y, z) = \iiint_G xy d(x, y, z).$$

Het gebied G in cilindercoördinaten is $\{(r, \phi, z) \mid 0 \leq z \leq 4, 0 \leq \phi \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 4 - z\}$, en dus

$$I = \int_0^4 \int_0^{4-z} \int_0^{2\pi} r^2 \cos \phi \sin \phi \cdot r d\phi dr dz.$$

Aangezien

$$\int_0^{2\pi} \cos \phi \sin \phi d\phi = \left[\frac{1}{2} \sin^2 \phi \right]_0^{2\pi} = 0,$$

geldt er

$$\iint_S \langle \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle d\Omega = 0 + 32\pi.$$