

Tentamen Analyse 2, wi1601
donderdag 21 juni 2012, 14.00-17.00

-
- Een rekenmachine of formuleblad is niet toegestaan.
 - Ieder antwoord dient gemotiveerd te worden met een (korte) berekening, redenering of verwijzing naar de theorie.
-

- (4) 1. a) Maak de volgende definities af.
De verzameling $D \subset \mathbb{R}^n$ heet *open* als ...
De verzameling $E \subset \mathbb{R}^n$ heet *gesloten* als ...
- (8) b) De verzameling $E \subset \mathbb{R}^n$ is gesloten, en $(\mathbf{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ is een convergente rij in E met $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{x}$. Toon aan dat $\mathbf{x} \in E$.
Hint: Stel $\mathbf{x} \notin E$.

2. De functie $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ is gegeven door

$$f(x, y) = \sqrt[3]{x^2 y^2}.$$

- (4) a) Bepaal $f_x(0, 0)$ en $f_y(0, 0)$.
- (7) b) Toon aan dat f_x niet continu is in $(0, 0)$.
- (7) c) Is f differentieerbaar in $(0, 0)$?

- (14) 3. Gegeven zijn de punten $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ in $\mathbb{R}^3$. De functie $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ is gedefinieerd door

$$g(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{x} - \mathbf{b}\|^2 + \|\mathbf{x} - \mathbf{c}\|^2.$$

Laat zien dat g precies één globaal minimum heeft, en bepaal de plaats en de grootte van dit minimum.

4. Gegeven is het stelsel vergelijkingen

$$\begin{cases} x^3 + xyz + z^2 = 1 \\ \sin(\pi xy) + \cos(\pi yz) = 1 \end{cases}$$

- (7) a) Laat zien dat x en z in een omgeving van $(1, 1, 0)$ impliciet zijn gedefinieerd als continu differentieerbare functies van y .
- (8) b) Bovenstaande vergelijkingen definiëren een gladde kromme K met parametrisering $(x(y), y, z(y))$, met y in een open interval dat 1 bevat. Geef een parametervoorstelling van de raaklijn aan K in $(1, 1, 0)$.

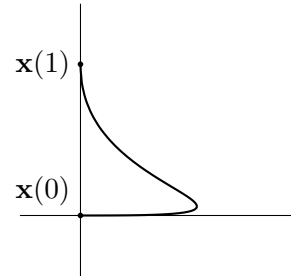
Zie ommezijde voor vervolg

5. De kromme C in $\mathbb{R}^2$ wordt geparametriseerd door

$$\mathbf{x}(t) = \left(\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right) \sin(\pi t), t^3 \right), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

en heeft $\mathbf{x}(0) = (0, 0)$ als beginpunt. Het vectorveld $\mathbf{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ met $D = \{(x, y) \mid xy > -1\}$, wordt gegeven door

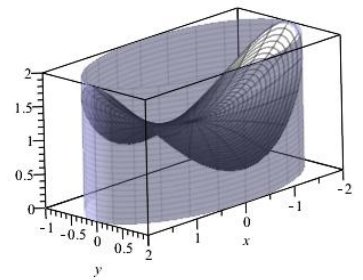
$$\mathbf{F}(x, y) = \left(\frac{y}{xy+1}, \frac{x}{xy+1} + 1 \right).$$



(4) a) Laat zien dat $\mathbf{F}$ conservatief is.

(8) b) Bereken $\int_C \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\tau} \rangle ds$.

(12) 6. Het oppervlak $S \subset \mathbb{R}^3$ is het gedeelte van de grafiek van $z = 1 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}y^2$ dat binnen de ellipsvormige cilinder $\frac{1}{4}x^2 + y^2 = 1$ ligt. Bereken $\text{Opp}(S)$.



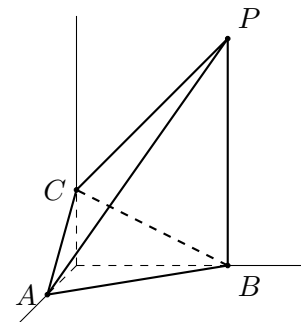
(7) 7. De punten A, B, C en P worden gegeven door

$$A = (1, 0, 0), \quad B = (0, 2, 0), \quad C = (0, 0, 1), \quad P = (0, 2, 3).$$

Het oppervlak S wordt gevormd door de driehoeken PAB , PBC en PCA . S is georiënteerd volgens de eenheidsnormaal $\mathbf{n}$ die in $(0, 1, 1)$ gegeven wordt door $\mathbf{n} = (-1, 0, 0)$. Het vectorveld $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ wordt gegeven door

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (ye^x, 2e^x + z, e^z + y).$$

Bereken $\iint_S \langle \text{rot}(\mathbf{F}), \mathbf{n} \rangle d\Omega$.



$$\text{Cijfer} = \frac{\text{Totaal} + 10}{10}$$