

1. a) zie dictaat

b) Tegenvoorbeeld: $\{0\} \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$

c) Zij $\varepsilon > 0$. $\mathbf{a}$ is geen verdichtingspunt, dus er bestaat een $r > 0$ zo dat $B(\mathbf{a}; r) \cap D = \{\mathbf{a}\}$. We kiezen $\delta = r$, dan geldt voor alle $\mathbf{x} \in D$ met $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta$ (de enige $\mathbf{x}$ die hieraan voldoet is $\mathbf{a}$), dat

$$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})| = 0 < \varepsilon.$$

2. a) De stationaire punten zijn $(0, 0)$, $(\sqrt{2}, -1)$ en $(-\sqrt{2}, -1)$.

M.b.v. de matrix van Hesse volgt dat f heeft een lokaal minimum heeft in $(0, 0)$ met grootte 0. Dit is geen globaal minimum, want $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x, -2) = -\infty$.

b) Er zijn geen stationaire punten in het inwendige van G . Onderzoek van de rand geeft globale maxima in $(-2, 2)$ en $(2, 2)$ met grootte 16, en een globaal minimum in $(0, 0)$. (Er is geen lokaal minimum in $(0, 2)$!)

3. a) zie dictaat

b) (i) $\Rightarrow$ (ii): Neem L als in de definitie en definieer $R(\mathbf{h}) = \mathbf{f}(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{a}) - L(\mathbf{h})$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): triviaal

c) zie dictaat

4. a) Pas de inverse functie stelling toe.

b) Volgt direct uit de inverse functie stelling: $\mathbf{g}'(u(x, y), v(x, y)) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \frac{2y}{x} & \frac{x^2}{y^2} \\ \frac{y^2}{x^2} & \frac{2x}{y} \end{pmatrix}$

c) Linearisering:

$$\mathbf{T}_1(x, y) = \mathbf{g}(1, 1) + d\mathbf{g}(1, 1)(x-1, y-1) = \left(1 + \frac{2}{3}(x-1) + \frac{1}{3}(y-1), 1 + \frac{1}{3}(x-1) + \frac{2}{3}(y-1)\right).$$

$$\mathbf{g}\left(\frac{11}{10}, \frac{9}{10}\right) \approx \mathbf{T}_1\left(\frac{11}{10}, \frac{9}{10}\right) = \left(\frac{31}{30}, \frac{29}{30}\right)$$

5. Gebruik de transformatie $u = x - y$, $v = x + y$. G wordt dan $H = \{(u, v) \mid 0 \leq u \leq 1, u^2 \leq v \leq u\}$. Schrijf vervolgens H als $H = \{(u, v) \mid 0 \leq v \leq 1, v \leq u \leq \sqrt{v}\}$. De integraal wordt nu

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \int_v^{\sqrt{v}} \frac{u}{v} e^v du dv = \frac{1}{4}e - \frac{1}{2}.$$

6. Gebruik parametrisering $\mathbf{x}(\varphi) = (\varphi^2 \cos \varphi, \varphi^2 \sin \varphi)$, $-\pi \leq \varphi \leq \pi$.

Antwoord: $\frac{2}{3}(4 + \pi^2)^{3/2} - \frac{16}{3}$.

7. a) Ga over op cilindercoördinaten. Het gebied G wordt nu

$$H = \{(r, \varphi, z) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, r^2 \leq z \leq \sqrt{2 - r^2}\}.$$

Antwoord: $\frac{7\pi}{6}$.

- b) We schrijven $S = S_b \cup S_p$, met S_b het gedeelte van S op de bol, en S_p het gedeelte op de paraboloid. S_b kan worden geparametriseerd door

$$\mathbf{X}(u, v) = (u, v, \sqrt{2 - u^2 - v^2}) \quad \text{op} \quad G_b = \{(u, v) \mid u^2 + v^2 \leq 1\}.$$

Dit leidt tot $\iint_{S_b} \langle \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle d\Omega = \frac{\pi}{2}.$

S_p kan worden geparametriseerd door

$$\mathbf{Y}(u, v) = (u, v, u^2 + v^2) \quad \text{op} \quad G_p = \{(u, v) \mid u^2 + v^2 \leq 1\},$$

en dit leidt tot $\iint_{S_p} \langle \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle d\Omega = \frac{2\pi}{3}.$