

Toets Analyse 2, wi1601
vrijdag 13 april 2012, 9.00-11.00

-
- Een rekenmachine of formuleblad is niet toegestaan.
 - Ieder antwoord dient gemotiveerd te worden met een (korte) berekening, redenering of verwijzing naar de theorie.
-

1. a) Maak de volgende definitie af. (2)

Zij $D \subset \mathbb{R}^n$ en $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$. Het punt $\mathbf{a}$ is een *randpunt* van D als ...

De rand ∂D van D is gedefinieerd als de verzameling van alle randpunten van D .

- b) Bewijs of weerleg: Als D een gesloten verzameling is, dan $\partial D \subset D$. (7)

2. Zij $D \subset \mathbb{R}^n$ en $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^m$. Laat $f_1, f_2, \dots, f_m : D \rightarrow \mathbb{R}$ de componentfuncties van $\mathbf{f}$ zijn, dat wil zeggen $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x}))$ voor $\mathbf{x} \in D$.

- a) Maak de volgende definitie af. (2)

De functie $\mathbf{f}$ is *continu* in $\mathbf{a} \in D$ als ...

- b) Bewijs: Als $\mathbf{f}$ continu is in $\mathbf{a} \in D$, dan is iedere componentfunctie f_j ook continu in $\mathbf{a}$. (7)

3. De functie $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ is gegeven door

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\arctan(x^3)}{x^2 + y^2} & \text{als } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{als } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- a) Bepaal $f_x(0, 0)$ en $f_y(0, 0)$. (3)

- b) Is f differentieerbaar in $(0, 0)$? (7)

4. Het gebied $G \subset \mathbb{R}^2$ en de functie $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ zijn gegeven door (9)

$$f(x, y) = x^3 - 12xy + 8y^3, \quad G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq -1\}.$$

Bepaal de plaats, aard en grootte van de extremen van f .

5. Bereken (8)

$$\iint_G \sin(x^2) d(x, y), \quad \text{waarbij } G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1, y\sqrt{\pi} \leq x \leq \sqrt{\pi}\}.$$

$$\text{Cijfer} = \frac{\text{Totaal} + 5}{5}$$