

Uitwerkingen Toets Analyse 2, wi1601

vrijdag 13 april 2012, 9.00-11.00

1. a) Het punt $\mathbf{a}$ is een randpunt van D als voor iedere $r > 0$ geldt $B(\mathbf{a}; r) \cap D \neq \emptyset$ en $B(\mathbf{a}; r) \cap D^c \neq \emptyset$.
b) De uitspraak is waar. Stel D is gesloten en $\partial D \not\subset D$. Dan bestaat er een randpunt $\mathbf{a} \in D^c$. Omdat D gesloten is, is D^c open, dus ieder punt in D^c is een inwendig punt. Er bestaat dus een $r > 0$ zo dat $B(\mathbf{a}; r) \subset D^c$, maar dan is $\mathbf{a}$ geen randpunt. Conclusie: $\partial D \subset D$.
2. a) De functie $\mathbf{f}$ is continu in $\mathbf{a} \in D$ als voor alle $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat, zodanig dat uit $\mathbf{x} \in D$ en $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta$ volgt dat $\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{a})\| < \varepsilon$.
b) Zij $\varepsilon > 0$. Omdat $\mathbf{f}$ continu is in $\mathbf{a}$ bestaat er een $\delta > 0$ zo dat uit $\mathbf{x} \in D$ en $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta$ volgt dat $\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{a})\| < \varepsilon$. Voor een vector $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$ geldt de ongelijkheid $|y_j| \leq \|\mathbf{y}\|$, voor $j = 1, \dots, m$. Pas nu deze ongelijkheid toe op $\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{a})$, dan volgt uit $\mathbf{x} \in D$ en $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta$ dat

$$|f_j(\mathbf{x}) - f_j(\mathbf{a})| \leq \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{a})\| < \varepsilon,$$

dus is f_j continu in $\mathbf{a}$.

3. a) Met de definitie van partiële afgeleide volgt

$$f_x(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\arctan(h^3)}{h^3} \stackrel{\text{l'Hôpital}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{3h^2}{1+h^6}}{3h^2} = 1.$$
$$f_y(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h^3} = 0.$$

- b) f is differentieerbaar in $(0,0)$ als

$$\lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)} \frac{|f(h_1, h_2) - f(0,0) - \langle (h_1, h_2), \nabla f(0,0) \rangle|}{\|(h_1, h_2)\|} = 0.$$

Definieer

$$g(h_1, h_2) = \frac{f(h_1, h_2) - f(0,0) - \langle (h_1, h_2), \nabla f(0,0) \rangle}{\|(h_1, h_2)\|} = \frac{\frac{\arctan(h_1^3)}{h_1^2 + h_2^2} - h_1}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \\ = \frac{\arctan(h_1^3) - h_1^3 - h_1 h_2^2}{(h_1^2 + h_2^2)^{\frac{3}{2}}},$$

dan zien we dat bijvoorbeeld

$$\lim_{h \downarrow 0} g(h, h) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \lim_{h \downarrow 0} \frac{\arctan(h^3) - 2h^3}{|h|^3} = \frac{1}{2\sqrt{2}} (1 - 2) = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \neq 0.$$

Conclusie: f is niet differentieerbaar in $(0,0)$.

4. We berekenen eerst de stationaire punten van f ;

$$\begin{aligned} f_x(x, y) = 3x^2 - 12y = 0 & \implies y = \frac{1}{4}x^2, \\ f_y(x, y) = -12x + 24y^2 = 0 & \implies x = 2y^2. \end{aligned}$$

Dit geeft de vergelijking $y = y^4$, met als oplossingen $y = 0$ en $y = 1$. De stationaire punten zijn dus $(0, 0)$ en $(2, 1)$.

De matrix van Hesse is

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{xy}(x, y) \\ f_{xy}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & -12 \\ -12 & 48y \end{pmatrix}.$$

In $(0, 0)$ geeft dit

$$H(0, -2) = \begin{pmatrix} 0 & -12 \\ -12 & 0 \end{pmatrix},$$

en dus $\det(H(0, 0)) < 0$. Hieruit volgt dat $H(0, 0)$ indefinit is, dus f heeft geen extreem in $(0, 0)$.

In $(2, 1)$,

$$H(2, 1) = \begin{pmatrix} 12 & -12 \\ -12 & 48 \end{pmatrix},$$

dus $\det(H(2, 1)) > 0$, en omdat $f_{xx}(2, 1) > 0$ is $H(2, 1)$ positief definit. Hieruit volgt dat f een lokaal minimum heeft in $(2, 1)$ met grootte $f(2, 1) = -8$.

Op de rand $x = -1$ moeten we de functie

$$g(y) = f(-1, y) = -1 + 12y + 8y^3$$

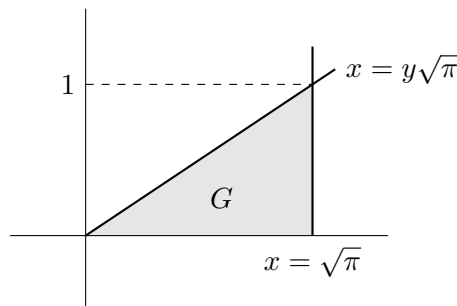
onderzoeken. Er geldt

$$g'(y) = 12 + 24y^2 > 0 \quad \forall y,$$

dus g is een stijgende functie en f heeft dus geen extremen op de rand.

Verder volgt uit $\lim_{y \rightarrow \pm\infty} f(x, y) = \pm\infty$ dat f geen globale extremen heeft.

5. Met behulp van een tekening van G zien we dat $G = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq \sqrt{\pi}, 0 \leq y \leq \frac{x}{\sqrt{\pi}}\}$.



De integraal wordt nu

$$\begin{aligned}\iint_G \sin(x^2) \, d(x, y) &= \int_0^{\sqrt{\pi}} \left(\int_0^{\frac{x}{\sqrt{\pi}}} \sin(x^2) dy \right) dx \\&= \int_0^{\sqrt{\pi}} \left[y \sin(x^2) \right]_{y=0}^{y=\frac{x}{\sqrt{\pi}}} dx \\&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{\pi}} x \sin(x^2) dx \\&= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\pi} \sin(u) du \quad (\text{substitutie } x^2 = u) \\&= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left[-\cos(u) \right]_0^{\pi} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}.\end{aligned}$$