# Uitwerkingen hertentamen Algebra 1, 12 juli 2013

**Opgave 1**
**a)** Er geldt $\sigma = (12496)(3758)$.
**b)** De orde van het product van disjuncte cykels is het kleinste gemene veelvoud van de lengtes van die cykels, dus $\mathrm{ord}(\sigma) = \mathrm{kgv}(5,4) = 20$.
**c)** Schrijven we $\tau_1 = (12496)$ en $\tau_2 = (3758)$, dan geldt dus $\sigma = \tau_1\tau_2$. De permutaties $\tau_1$ en $\tau_2$ commuteren. Schrijven we $k = 127^{2013}$, dan geldt dus $\sigma^k = \tau_1^k\tau_2^k$. Er geldt $\mathrm{ord}(\tau_1) = 5$, dus we bepalen eerst $k \pmod 5$. Er geldt $\varphi(5) = 4$ en dus $2013 \equiv 1 \pmod{\varphi(5)}$. Wegens $\mathrm{ggd}(127,5) = 1$ betekent dit dat $k \equiv 127^1 \equiv 2 \pmod 5$, en dus $\tau_1^k = \tau_1^2 = (14629)$.
Er geldt $\mathrm{ord}(\tau_2) = 4$, dus we bepalen eerst $k \pmod 4$. Er geldt $\varphi(4) = 2$ en dus $2013 \equiv 1 \pmod{\varphi(4)}$. Wegens $\mathrm{ggd}(127,4) = 1$ betekent dit dat $k \equiv 127^1 \equiv 3 \pmod 4$, en dus $\tau_2^k = \tau_2^3 = (3857)$. We vinden dus

$$\sigma^k = (14629)(3857).$$

**Opgave 2**
We bepalen eerst het aantal Achterhoekse Achthoeken als er $n$ kleuren beschikbaar zijn en gebruiken daarna $n = 4$. De symmetriegroep van een regelmatige achthoek is isomorf met $D_8$ van orde 16. Wegens de banenformule geldt dus dat het gezochte aantal gelijk is aan

$$\frac{1}{16}\sum_{g\in D_8}\chi(g),$$

waarbij $\chi(g)$ het aantal Achterhoekse Achthoeken is dat op zichzelf wordt afgebeeld door het element $g$. Van de 16 groepselementen zijn er 4 die een spiegeling zijn om de lijn door de middens van twee tegenoverliggende zijden. Zo'n spiegeling $s_1$ verwisselt de diagonalen paarsgewijs; Voor een Achterhoekse Achthoek die een dekpunt is van $s_1$ hebben de diagonalen binnen elk paar dezelfde kleur; voor elk van de twee paren is de kleur vrij, dus geldt $\chi(s_1) = n^2$.

Er zijn ook 4 spiegelingen in een diagonaal. Zo'n spiegeling $s_2$ houdt de diagonaal waarin gespiegeld wordt vast en ook de diagonaal die er loodrecht op staat. De andere twee diagonalen worden verwisseld door $s_2$, dus als een Achterhoekse Achthoek een dekpunt is van $s_2$, dan hebben die twee diagonalen dezelfde kleur. In totaal zijn er voor dekpunten van $s_2$ dus drie kleuren vrij, dus geldt $\chi(s_2) = n^3$.

Zij $r$ de rotatie over $\pi/4$. Als een Achterhoekse Achthoek een dekpunt is van $r$ of $r^{-1}$, dan hebben alle diagonalen dezelfde kleur. Hetzelfde geldt voor $r^3$ en $r^{-3}$, dus $\chi(r) = \chi(r^{-1}) = \chi(r^3) = \chi(r^{-3}) = n$.

De rotaties $r^2$ en $r^{-2}$ verwisselen elke diagonaal met de diagonaal die er loodrecht op staat. Als een Achterhoekse Achthoek een dekpunt is van $r^2$ of $r^{-2}$, dan heeft elke diagonaal dus dezelfde kleur als de diagonaal die er loodrecht op staat. Het aantal van zulke Achterhoekse Achthoeken is dus $n^2$.

De rotatie $r^4$ over hoek $\pi$ beeldt elke diagonaal op zichzelf af, dus elk van de Achterhoekse Achthoeken is een dekpunt van $r^4$ en er geldt $\chi(r^4) = n^4$. Uiteraard geldt ook $\chi(\mathrm{id}) = n^4$.

Dit alles is samengevat is de volgende tabel (geconjugeerde elementen zijn samengenomen).

| $g$ | id | $s_1,\dots$ | $s_2,\dots$ | $r, r^{-1}$ | $r^3, r^{-3}$ | $r^2, r^{-2}$ | $r^4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| # | 1 | 4 | 4 | 2 | 2 | 2 | 1 |
| $\chi(g)$ | $n^4$ | $n^2$ | $n^3$ | $n$ | $n$ | $n^2$ | $n^4$ |

Het gezochte aantal is dus

$$\frac{1}{16}(n^4 + 4n^2 + 4n^3 + 2n + 2n + 2n^2 + n^4) = \frac{1}{8}(n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 2n) = 55.$$

**Opgave 3**

**a)** De groep $G = (\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})\times(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^*$ is abels, dus er geldt $\#\operatorname{Hom}(S_6, G) = \#\operatorname{Hom}((S_6)_{\mathrm{ab}}, G) = \#\operatorname{Hom}(\{\pm 1\}, G)$ (zie Gevolg 8.6). Voor elke $f \in \operatorname{Hom}(\{\pm1\}, G)$ is de orde van $f(-1)$ een deler van 2. Andersom is er voor elk element $g \in G$ waarvan de orde een deler is van 2, een homomorfisme $\{\pm1\} \to G$ dat $-1$ naar $g$ stuurt, dus we zoeken het aantal elementen van orde 1 of 2 in $G$. De groep $\mathbb{Z}/16\mathbb{Z}$ heeft twee elementen van orde 1 of 2, namelijk $(0 \mod 16)$ en $(8 \mod 16)$. Alle vier elementen in $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^*$ hebben orde 1 of 2, dus in de productgroup zitten $2 \cdot 4 = 8$ elementen van orde 1 of 2, dus $\#\operatorname{Hom}(S_6, G) = 8$.

**b)** Zij $f\colon S_6 \to D_8$ een homomorfisme en $x \in S_6$ een element van oneven orde $k$. Dan geldt $f(x)^k = f(x^k) = e$, dus de orde van $f(x) \in D_8$ is een deler van $k$ en dus ook oneven. De orde van $f(x)$ is ook een deler van de orde $\#D_8 = 16$ van de groep $D_8$, dus de orde van $f(x)$ is gelijk aan 1, dus $f(x) = e$ en $x \in \ker f$. Dit betekent dat voor alle 3-cykels $x \in S_6$ geldt $x \in \ker f$. Omdat $A_6$ voortgebracht wordt de 3-cykels (Stelling 2.10), volgt $A_6 \subset \ker f$, dus $f$ induceert een homomorfisme $S_6/A_6 \cong \{\pm1\} \to D_8$. Dit impliceert $\#\operatorname{Hom}(S_6, G) = \#\operatorname{Hom}(\{\pm1\}, G)$, en net als in het vorige deel is dit aantal gelijk aan het aantal elementen in $G = D_8$ van orde 1 of 2. Dit zijn de acht spiegelingen, het eenheidselement, en de rotatie over 180°, dus we krijgen $\#\operatorname{Hom}(S_6, G) = 10$.

**Opgave 4**

**a)** Wegens de Chinese reststelling geldt $(\mathbb{Z}/2013\mathbb{Z})^* \cong (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^* \times (\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})^* \times (\mathbb{Z}/61\mathbb{Z})^*$. De ordes van de drie groepen $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ met $p = 3$, $p = 11$ en $p = 61$ zijn respectievelijk $p - 1 = 2$, $p - 1 = 10$ en $p - 1 = 60$. Deze ordes zijn allemaal delers van 60, dus geldt ook voor elk element $x$ in een van deze groepen dat $x^{60} = \overline{1}$. Hetzelfde geldt dus in $(\mathbb{Z}/2013\mathbb{Z})^*$.

**b)** De orde $k = \operatorname{ord}(\overline{-2})$ is een deler van 60, dus als de orde $k$ niet gelijk is aan 60, dan is $k$ een deler van $60/2 = 30$ of van $60/3 = 20$ of van $60/5 = 12$. Modulo 61 geldt

$$\begin{aligned}
(-2)^6 &\equiv 64 \equiv 3,\\
(-2)^{12} &\equiv ((-2)^6)^2 \equiv 3^2 \equiv 9 \not\equiv 1,\\
(-2)^{20} &\equiv (-2)^{12} \cdot (-2)^6 \cdot (-2)^2 \equiv 9 \cdot 3 \cdot 4 \equiv 47 \not\equiv 1,\\
(-2)^{30} &\equiv ((-2)^6)^5 \equiv 3^5 \equiv 243 \equiv -1 \not\equiv 1.
\end{aligned}$$

De orde in $(\mathbb{Z}/61\mathbb{Z})^*$ is dus blijkbaar geen deler van 12, 20 of 30, en dus gelijk aan 60. De orde in $(\mathbb{Z}/2013\mathbb{Z})^*$ is minstens zo groot, maar ook hooguit 60, en dus gelijk aan 60.

**Opgave 5**

**a)** Omdat $G$ is bevat in de groep $S(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ van alle permutaties van $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, hoeven we alleen te checken dat $G$ een ondergroep is. De identiteit is $f_{1,0}$, dus die is bevat in $G$. Voor $a_1, a_2 \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ en $b_1, b_2 \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ geldt voor alle $x \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ dat

$$(1) \qquad (f_{a_1,b_1} \circ f_{a_2,b_2})(x) = a_1(a_2x + b_2) + b_1 = (a_1a_2)x + (a_1b_2 + b_1) = f_{a_1a_2, a_1b_2+ab_1}(x),$$

dus $f_{a_1,b_1} \circ f_{a_2,b_2} = f_{a_1a_2,a_1b_2+ab_1} \in G$. Uit een soortgelijke berekening volgt bovendien dat $f_{a,b}^{-1} = f_{a^{-1},-a^{-1}b} \in G$, dus $G$ is inderdaad een ondergroep van $S(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$.

**b)** We definiëren de afbeelding $\varphi\colon G \to (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ door

$$\varphi(f) = f(\overline{1}) - f(\overline{0}).$$

We laten zien dat $\varphi$ een homomorfisme is. Er geldt $\varphi(f_{a,b}) = (a + b) - (b) = a$. Wegens de berekeningen in deel (a) vinden we dus $\varphi(f_{a,b}^{-1}) = \varphi(f_{a^{-1},-a^{-1}b}) = a^{-1} = \varphi(f_{a,b})^{-1}$ en $\varphi(f_{a_1,b_1} \circ f_{a_2,b_2}) = \varphi(f_{a_1a_2,a_1b_2+ab_1}) = a_1a_2 = \varphi(f_{a_1,b_1})\varphi(f_{a_2,b_2})$. De afbeelding $\varphi$ is dus inderdaad een homomorfisme. De deelverzameling $N$ is de kern van $\varphi$ en dus een normale ondergroep van $G$.

**c)** Wegens de Isomorfiestelling 4.9 is $G/N$ isomorf met het beeld $\varphi[G]$. De afbeelding $\varphi$ is surjectief per definitie van $G$, dus het beeld is $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$.