Hertentamen Algebra 1, 12 juli 2013

Je mag de syllabus en aantekeningen gebruiken, maar het gebruik van een rekenmachine is niet toegestaan. Je mag niet naar opgaven uit het dictaat verwijzen.

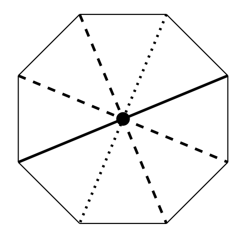
Motiveer steeds je antwoord en noem de stellingen die je gebruikt!

Opgave 1
Definieer de permutatie $\sigma \in S_9$ door $\sigma = (1\ 5\ 8\ 3\ 7)(2\ 4\ 3\ 7\ 6)(1\ 6\ 3\ 4\ 9\ 7)$.
a) Schrijf σ als product van disjuncte cykels.
b) Wat is de orde van σ?
c) Schrijf

$$\sigma^{\left(127^{2013}\right)}$$

als product van disjuncte cykels.

Opgave 2
In een glasfabriek in Zutphen vervaardigt men *Achterhoekse Achthoeken*. Een Achterhoekse Achthoek is een glazen regelmatige achthoek waarvan elk van de vier diagonalen door het midden een kleur heeft. Er zijn vier kleuren beschikbaar: rood, geel, blauw en groen. Het middelpunt is zwart. In de figuur staat een voorbeeld (de doorgetrokken lijn staat voor de kleur rood, de onderbroken lijnen voor blauw en de gestippelde lijn voor groen.) Alle Achterhoekse Achthoeken zijn even groot. Uiteraard zijn twee Achterhoekse Achthoeken hetzelfde als ze door draaiing of omkering (spiegeling) in elkaar overgaan. Hoeveel verschillende Achterhoekse Achthoeken kan men maken?



Geef duidelijke uitleg bij elke stap van je berekening!

Opgave 3
Hoeveel homomorfismen zijn er van de groep S_6 naar de groep G voor
a) $G = (\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^*$?
b) $G = D_8$ (de diëdergroep van 16 elementen)? [Hint: Laat zien dat elk homomorfisme $f\colon G_1 \to G_2$ elementen van oneven orde in G_1 afbeeldt op elementen van oneven orde in G_2, en gebruik dat de ondergroep A_6 van S_6 wordt voortgebracht door alle 3-cykels.]

Opgave 4
a) Laat zien dat voor elk element $x \in (\mathbb{Z}/2013\mathbb{Z})^*$ geldt $x^{60} = \overline{1}$.
[Hint: Chinese reststelling, $2013 = 3 \cdot 11 \cdot 61$.]
b) Bepaal de orde van het element $\overline{-2} \in (\mathbb{Z}/2013\mathbb{Z})^*$.

Opgave 5
Zij $n \geq 2$ een geheel getal. Voor elke $a \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ en $b \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ definiëren we de bijectie $f_{a,b}\colon \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ door $f_{a,b}(x) = ax + b$ voor alle $x \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. (Je hoeft niet te bewijzen dat dit een bijectie is.) Zij

$$G = \{f_{a,b}\ :\ a \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* \text{ en } b \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\}$$

de verzameling van al deze bijecties. Zij $N \subset G$ de deelverzameling van alle f met

$$f(\overline{1}) - f(\overline{0}) = \overline{1}.$$

a) Laat zien dat G een groep is, met de samenstelling van functies als groepsoperatie.
b) Laat zien dat N een normale ondergroep is van G.
c) Bewijs dat G/N isomorf is met $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$.

Als alles goed gaat, staan morgenavond de cijfers en eventuele mededelingen op het web.