

Toets Inleiding Kansrekening WI1614.

2 april 2013, 9:00-12:00

- De toets bestaat uit 15 onderdelen. Met ieder onderdeel kan maximaal 2 punten verdiend worden.
 - Er mag een formuleblad (formaat A4) met zelfgekozen formules meegenomen worden.
 - Er mag ook een (mogelijk grafische) rekenmachine gebruikt worden.
1. Een bron zendt onafhankelijk de symbolen 0 of 1 uit, met gelijke kans. Een ontvanger leest wat de bron uitzendt en maakt hierbij fouten. De kans dat de ontvanger een 1 leest als de bron een 0 heeft uitgezonden is $1/10$, de kans dat de ontvanger een 0 leest als de bron een 1 heeft uitgezonden is $1/20$.

- a) Wat is de kans dat de ontvanger een 1 leest? Noem X uitgezonden symbool en Y het gelezen symbool. Gevraagd is dan $P(Y = 1)$. Gebruik makend van de totale kanswet:

$$\begin{aligned} P(Y = 1) &= P(Y = 1|X = 1)P(X = 1) + P(Y = 1|X = 0)P(X = 0) \\ &= \left(1 - \frac{1}{20}\right) \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{10}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{21}{40} \end{aligned}$$

- b) Gegeven dat de ontvanger een 0 leest, wat is de kans dat een 1 werd uitgezonden? Gebruik makend van Bayes:

$$\begin{aligned} P(X = 1|Y = 0) &= \frac{P(Y = 0|X = 1)P(X = 1)}{P(Y = 0)} \\ &= \frac{(1/20)(1/2)}{19/40} = \frac{1}{19} \end{aligned}$$

- c) Indien 10 symbolen worden uitgezonden wat is dan de kans dat precies 2 symbolen fout gelezen worden? De kans dat een symbool fout wordt uitgezonden is

$$P(X \neq Y) = P(X = 1 \cap Y = 0) + P(X = 0 \cap Y = 1) = \frac{1}{2} \frac{1}{20} + \frac{1}{2} \frac{1}{10} = \frac{3}{40}$$

Het aantal fout symbolen is binomiaal verdeeld met $n = 10$ en $p = 3/40$ wat geeft de kans dat precies 2 symbolen fout gelezen=

$$\binom{10}{2} (3/40)^2 (37/40)^8$$

- d) Wat is de verwachting van het aantal symbolen dat moet worden uitgezonden voordat we tweemaal een 1 gelezen hebben? Dit aantal is negatief binomiaal verdeeld met $n = 2$ en $p = 3/40$. De verwachting is dus $2(40/3)$

2. X is een continue stochast met kansdichtheid

$$f_X(x) = \begin{cases} 8(x^3 - x^7) & \text{voor } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{elders} \end{cases} \quad (1)$$

- a) Laat zien dat f_X wel degelijk een kansdichtheid definieert en bereken de bijbehorende cumulatieve verdelingsfunctie. Voor $x \in [0, 1]$ geldt $x^3 \geq x^7$ dus $f_X(x) \geq 0$. Verder geldt $\int_0^1 8(x^3 - x^7)dx = (8/4 - 8/8) = 1$. De cumulatieve verdelingsfunctie is

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{voor } x < 0 \\ \int_0^x 8(y^3 - y^7)dy = 2x^4 - x^8 & \text{voor } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{voor } x > 1 \end{cases}$$

- b) Bereken de verwachting en de variantie van X . Gebruik dat $\int_0^1 x^n = 1/(n+1)$

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^1 x 8(x^3 - x^7)dx = 8(1/5 - 1/9) = 32/45$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_0^1 x^2 8(x^3 - x^7)dx = 8(1/6 - 1/10) = 32/60$$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 \approx 0.0276$$

- c) Bereken de kansdichtheid van $Y = \sqrt{-\ln(X)}$. De transformatie is $y = \sqrt{-\ln(x)}$, of $x = e^{-y^2}$. Bijgevolg voor $y \geq 0$

$$f_Y(y) = f_X(x(y)) |dx/dy| = 8(e^{-3y^2} - e^{-7y^2}) |e^{-y^2} (-2y)| = 16y(e^{-3y^2} - e^{-7y^2})$$

en elders is $f_Y(y) = 0$.

- d) Zij U een uniform verdeelde stochast op het interval $[0, 1]$. Voor welke functie h geldt dat $h(U)$ verdeeld is zoals X ? Dit is de inverse verdelingsfunctie. I.e., stellen we $x = h(u)$ dan voldoet x aan

$$2x^4 - x^8 = u$$

wat geeft, als we stellen $x^4 = y$

$$y^2 - 2y + u = 0$$

wat als oplossing $y \in [0, 1]$ geeft

$$y = 1 - \sqrt{1 - u}$$

en dus voor x :

$$x = h(u) = (1 - \sqrt{1 - u})^{1/4}$$

- e) We trekken onafhankelijke random getallen $x_1, \dots, x_n, \dots$ verdeeld zoals X en stoppen de trekking als de waarde $1/2$ overschreden wordt. Wat is dan de kans dat we 4 of meer trekkingen nodig hebben? Het aantal is geometrisch verdeeld met

$$p = P(X \geq 1/2) = 1 - F_X(1/2) = 1 - (2 \cdot (1/2)^4 - (1/2)^8) = 1 - \frac{1}{8} + \frac{1}{256}$$

Bijgevolg

$$P(X \geq 4) = P(X > 3) = (1 - p)^3 = \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{256}\right)^3 \approx 0.001775$$

3. (X, Y) is een tweedimensionale continue stochast met kansdichtheid

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} e^{-x} & \text{voor } x \geq 0 \text{ en } 0 \leq y \leq x \\ 0 & \text{elders} \end{cases} \quad (2)$$

- a) Bereken de marginale kansdichtheden van X en Y .

$$f_X(x) = \int_0^x e^{-x} dy = x e^{-x}$$

$$f_Y(y) = \int_y^\infty e^{-x} dx = e^{-y}$$

(voor $x, y \geq 0$, daarbuiten zijn f_X en f_Y nul.)

- b) Zijn X en Y onafhankelijk? Beargumenteer uw antwoord. **Nee, want $f_{X,Y}(x,y) \neq f_X(x)f_Y(y)$.**

4. Zijn de volgende uitspraken juist of fout? Beargumenteer (bondig) uw antwoord.

- a) Voor twee stochasten X en Y geldt $V(X) > 0$, en $V(X - Y) = 0$. Dan kunnen X en Y niet onafhankelijk zijn.

$$0 = V(X - Y) = V(X) + V(Y) - 2\text{cov}(X, Y)$$

Hieruit volgt $\text{cov}(X, Y) \neq 0$ en dus zijn X en Y afhankelijk. De uitspraak is dus juist.

- b) X en Y zijn beide stochasten die enkel de waarde -1 of 1 aannemen, met gelijke kans. Verder geldt $\mathbb{E}(XY) = 0$. Dan geldt dat X en Y onafhankelijk zijn.

Stel $P(X = 1 \cap Y = -1) = y, P(X = -1 \cap Y = -1) = u$, en $P(X = 1 \cap Y = 1) = x, P(X = -1 \cap Y = 1) = z$. Uit de gegevens volgen de vergelijkingen $x + y + z + u = 1, x + y = z + u, x + z = y + u, x - y - z + u = 0$. De enige oplossing hiervan is $x = y = z = u = 1/4$. De uitspraak is dus juist.

- c) Voor de levensduur van een brug gebruikt men een stochast X waarvoor geldt $P(X > x) = e^{-\sqrt{x}}$ ($x > 0$). Deze verdeling is niet geheugenloos. **Deze uitspraak is juist. Enkel de exponentiële verdeling is geheugenloos.**
- d) Indien voor twee stochasten geldt $V(X) = 1 = V(Y)$, dan is het niet mogelijk dat $\text{cov}(X, Y) = 2$. **Deze uitspraak is juist. Er geldt**

$$|\text{cov}(X, Y)| \leq \sqrt{V(X)V(Y)} = 1$$

dus kan het niet zijn dat $\text{cov}(X, Y) = 2$.