

Hertentamen Inleiding Kansrekening WI1614.
29 augustus 2012, 9:00-12:00

- Het tentamen bestaat uit 25 onderdelen. Met ieder onderdeel kan maximaal 2 punten verdiend worden.
 - Het tentamen is open boek. Boeken, nota's en een (eventueel grafische) rekenmachine mogen gebruikt worden.
-

1. De ademanalyse die gebruikt wordt door de politie om te testen of bestuurders de legale grens van alcoholpromillage in het bloed overschrijden, voldoet aan $P(A|B) = P(A^c|B^c) = p$. Hierbij is A de gebeurtenis dat de ademanalyse aangeeft dat de legale grens overschreden is, en B de gebeurtenis dat de bestuurder de legale grens overschrijdt. Het is bekend dat ongeveer 5% van de bestuurders op zaterdagavond de legale grens overschrijden. De kans dat men (op zaterdagavond) getest wordt onderweg is ongeveer 25%.

- a) Beschrijf in woorden de betekenis van de conditionele kans $P(B^c|A)$.
- b) Bereken $P(B^c|A)$ indien $p = 0.95$.
- c) Wat is de minimale waarde van p zodanig dat $P(B|A) \geq 0.9$?
- d) Wat is, voor $p = 0.95$, de kans dat een bestuurder die (op zaterdagavond) teveel gedronken heeft er ongestraft vanaf komt ?

2. X is een continue stochast met cumulatieve verdelingsfunctie gegeven door

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} - \frac{1}{2}xe^{-x} & \text{voor } x \geq 0 \\ 0 & \text{voor } x < 0 \end{cases} \quad (1)$$

- a) Bereken de bijbehorende kansdichtheid.
- b) Bereken de verwachting en de variantie van X . U mag hierbij gebruiken dat $\int_0^\infty x^n e^{-x} dx = n!$.
- c) Stel $Y = e^{-X}$. Bereken de kansdichtheid van Y , en geef aan welke waarden Y kan aannemen.
- d) Zij X' en X onafhankelijke stochasten met verdeling gegeven door (1). Bereken de variantie van XX' .

3. (X, Y) is een continue tweedimensionale stochast met kansdichtheid gegeven door

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} Cxy^2 & \text{voor } 0 \leq x \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{elders} \end{cases} \quad (2)$$

- a) Toon aan dat $C = 10$.
 - b) Bereken de marginale kansdichtheden van X en Y .
 - c) Zijn X en Y onafhankelijk?
 - d) Bereken de conditionele verwachting $\mathbb{E}(X^2|Y)$.
4. $X_n, n = 1, 2, \dots$ zijn onafhankelijke stochasten waarvoor geldt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_n) &= e^{-n} \\ V(X_n) &= 1 + \frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

- a) Laat zien dat voor het gemiddelde $Y_N = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N X_n$ geldt

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}(Y_N) = 0$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} V(Y_N) = 0$$

U mag hierbij gebruiken dat indien een rij getallen a_n convergeert naar een getal a , dan geldt $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N a_n = a$.

- b) Laat zien dat Y_N in kans naar nul convergeert.
- c) Indien nu bovendien gegeven is dat X_n normaal verdeeld zijn, toon dan aan dat

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N X_i$$

in verdeling convergeert naar een standaard normaal verdeelde stochast.

5. (X_1, X_2, X_3, X_4) is multivariaat normaal verdeeld met verwachting nul en covariantiematrix C gegeven door

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

- a) Geef de onafhankelijkheidsrelaties van de stochasten (X_1, X_2, X_3) .
- b) Voor welke waarde(n) van a zijn de stochasten $aX_2 + X_3$ en $X_2 + aX_3$ onafhankelijk?
- c) Voor welke strikt positieve waarden van α, β, γ is de stochast

$$Y = \alpha X_1^2 + \beta(X_2 + 2X_3)^2 + \gamma X_4^2$$

χ^2 verdeeld, en met hoeveel vrijheidsgraden?

6. Een Markovketen met toestandruimte $S = \{1, 2, 3\}$ heeft overgangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

- a) Bepaal de stationaire verdeling(en). Is er een unieke stationaire verdeling?
- b) Indien de Markovketen start uit toestand 2, bereken dan de kans dat toestand 1 eerder bereikt wordt dan toestand 3.
- c) We spelen het volgende spel gebaseerd op deze Markov keten. Indien de Markovketen in toestand 1 is verliest de speler 2 (euro), indien de Markovketen in toestand 3 of 2 is, wint de speler 1 euro. We starten de Markovketen uit toestand 1, en noemen W_n de winst bij het n -de spel. Bereken de “asymptotische verwachte winst (of verlies) per tijdseenheid”

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathbb{E}(W_n)$$

7. Zijn de volgende beweringen juist of fout? Geef een (bondig) argument.
- a) Voor onafhankelijke en gelijk verdeelde positieve stochasten $X_i, i = 1, 2, 3, \dots$, waarvoor geldt $P(X_i \geq x) = 1/x^2$, kunnen we de centrale limietstelling toepassen.
 - b) Disjuncte gebeurtenissen zijn altijd onafhankelijk.
 - c) Een verzekeringsmaatschappij heeft 20000 verzekerden voor brand. De kans op een brand in de loop van een jaar (per verzekerde) wordt geschat op 10^{-4} . De kans dat in een jaar tijd geen schadegeval optreedt is dan benaderend e^{-2} .
 - d) Indien A en B disjuncte gebeurtenissen zijn met gelijke kans, dan geldt

$$P(A|A \cup B) = \frac{1}{2}$$