

Hertentamen Inleiding Kansrekening WI1614.
29 augustus 2012, 9:00-12:00

- Het tentamen heeft 25 onderdelen. Met ieder onderdeel kan maximaal 2 punten verdiend worden.
 - Het tentamen is open boek. Boeken, nota's en een (eventueel grafische) rekenmachine mogen gebruikt worden.
-

1. De ademanalyse die gebruikt wordt door de politie om te testen of bestuurders de legale grens van alcoholpercentage in het bloed overschrijden, voldoet aan $P(A|B) = P(A^c|B^c) = p$. Hierbij is A de gebeurtenis dat de ademanalyse aangeeft dat de legale grens overschreden is, en B de gebeurtenis dat de bestuurder de legale grens overschrijdt. Het is bekend dat ongeveer 5% van de bestuurders op zaterdagavond de legale grens overschrijden. De kans dat men (op zaterdagavond) getest wordt onderweg is ongeveer 25%.

- a) Beschrijf in woorden de betekenis van de conditionele kans $P(B^c|A)$.
Is de conditionele kans dat gegeven dat de ademanalyse aangeeft dat de bestuurder teveel gedronken heeft, de bestuurder niet teveel gedronken heeft
- b) Bereken $P(B^c|A)$ indien $p = 0.95$.

$$P(B^c|A) = \frac{P(A|B^c)P(B^c)}{P(A|B)P(B) + P(A|B^c)P(B^c)} = \frac{(0.05)(0.95)}{0.95 \cdot 0.05 + 0.95 \cdot 0.05} = 1/2$$

- c) Wat is de minimale waarde van p zodanig dat $P(B|A) \geq 0.9$?

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)} = \frac{p \cdot 0.05}{p \cdot 0.05 + (1-p) \cdot 0.95} = \frac{p}{p + (1-p)19} = \frac{p}{19 - 18p}$$

oplossen naar p geeft

$$0.9(19 - 18p) = p$$

$$p = 0.9(19)/(1 + 0.9 \cdot 18) = 0.994$$

- d) Wat is, voor $p = 0.95$, de kans dat een bestuurder die (op zaterdagavond) teveel gedronken heeft er ongestraft vanaf komt ?

Noem O de gebeurtenis dat hij er ongestraft vanaf komt, en T dat hij getest wordt

$$P(O) = P(O|T)P(T) + P(O|T^c)P(T^c) = (0.25)(0.05) + 0.75 = 0.7625$$

2. X is een continue stochast met cumulatieve verdelingsfunctie gegeven door

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} - \frac{1}{2}xe^{-x} & \text{voor } x \geq 0 \\ 0 & \text{voor } x < 0 \end{cases} \quad (1)$$

- a) Bereken de bijbehorende kansdichtheid.

Is de afgeleide van de cumulatieve verdeling

$$e^{-x} - \frac{1}{2}e^{-x} + \frac{1}{2}xe^{-x} = \frac{1}{2}(e^{-x} + xe^{-x})$$

- b) Bereken de verwachting en de variantie van X . U mag hierbij gebruiken dat $\int_0^\infty x^n e^{-x} = n!$.

$$E(X) = \frac{1}{2}(1 + 2) = 3/2$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \frac{1}{2}(2 + 6) = 4$$

$$V(X) = 4 - (9/4) = 7/4$$

- c) Stel $Y = e^{-X}$. Bereken de cumulatieve verdelingsfunctie van Y , en geef aan welke waarden Y kan aannemen.

Y kan de waarden aannemen tussen nul en 1. Voor $y \in (0, 1)$ geldt

$$P(Y \leq y) = P(X \geq -\ln(y)) = 1 - \left(1 - e^{\ln(y)} + \frac{1}{2} \ln y e^{\ln(y)}\right) = y - \frac{1}{2}y \ln(y)$$

- d) Zij X' en X onafhankelijke stochasten met verdeling gegeven door (1). Bereken de variantie van XX' .

$$\mathbb{E}(XX') = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(X') = (3/2)^2$$

$$\mathbb{E}((XX')^2) = \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}((X')^2) = 4^2$$

dus

$$V(XX') = 16 - (3/2)^4$$

3. (X, Y) is een continue tweedimensionale stochast met kansdichtheid gegeven door

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} Cxy^2 & \text{voor } 0 \leq x \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{elders} \end{cases} \quad (2)$$

- a) Toon aan dat $C = 10$.

$$\int_0^1 \left(\int_0^y xy^2 dx \right) dy = \int_0^1 y^4/2 dy = 1/10$$

- b) Bereken de marginale kansdichtheden van X en Y .

$$f_X(x) = \int_x^1 10xy^2 dy = 10x \frac{1-x^3}{3} = \frac{10(x-x^4)}{3}$$

$$f_Y(y) = \int_0^y 10xy^2 dx = 10y^4/2 = 5y^4$$

- c) Zijn X en Y onafhankelijk?

Neen want $f_{XY}(x, y) \neq f_X(x)f_Y(y)$.

- d) Bereken de conditionele verwachting $\mathbb{E}(X^2|Y)$. De conditionele kansdichtheid van X , gegeven $Y = y$ wordt gegeven door

$$f_{X|Y=y} = \frac{10xy^2}{5y^4} = 2x/y^2$$

voor $0 \leq x \leq y$ De verwachting van X^2 gegeven $Y = y$ is dus

$$\int_0^y x^2 2x/y^2 dx = 1/y^2 (y^4/2) = y^2/2$$

en dus is $\mathbb{E}(X^2|Y) = Y^2/2$

4. $X_n, n = 1, 2, \dots$ zijn onafhankelijke stochasten waarvoor geldt

$$\mathbb{E}(X_n) = e^{-n}$$

$$V(X_n) = 1 + \frac{1}{n^2}$$

- a) Laat zien dat voor het gemiddelde $Y_N = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N X_n$ geldt

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}(Y_N) = 0$$

$$\mathbb{E}(Y_N) = 1/N \sum_{n=1}^N \mathbb{E}(X_n) = 1/N \sum_{n=1}^N e^{-n} = \frac{1}{N} \frac{1 - e^{-N-1}}{1 - e^{-1}}$$

de limiet hiervan als $N \rightarrow \infty$ is duidelijk gelijk aan nul.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} V(Y_N) = 0$$

$$V(Y_N) = \frac{1}{N^2} \sum_{n=1}^N V(Y_n) = \frac{1}{N^2} \sum_{n=1}^N (1 + (1/n^2)) \leq \frac{1}{N^2} \sum_{n=1}^N (1+1) = 2/N$$

U mag hierbij gebruiken dat indien een rij getallen a_n convergeert naar een getal a , dan geldt $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N a_n = a$.

b) Laat zien dat Y_N in kans naar nul convergeert. voor $\epsilon > 0$ geldt

$$\mathbb{P}(|Y_N - \mathbb{E}(Y_N)| > \epsilon) \leq \frac{V(Y_N)}{\epsilon^2}$$

Bijgevolg omdat $V(Y_N)$ naar nul convergeert als $N \rightarrow \infty$ volgt dat $Y_N - \mathbb{E}(Y_N)$ naar nul convergeert in kans. Verder geldt

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}(Y_N) = 0$$

zodat $Y_N = (Y_N - \mathbb{E}(Y_N)) + (\mathbb{E}(Y_N))$ naar nul convergeert in kans.

c) Indien nu bovendien gegeven is dat X_n normaal verdeeld zijn, toon dan aan dat

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N X_i$$

in verdeling convergeert naar een standaard normaal verdeelde stochast. Stel $Z_N = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N X_i$, dan geldt, gebruik makend van onafhankelijkheid en normaliteit van X_i geldt dat Z_N normaal verdeeld is met verwachting

$$\mu_N = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N \mathbb{E}(X_n) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N e^{-n}$$

en variantie

$$\sigma_N^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N V(X_n) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$$

als $N \rightarrow \infty$ dan $\mu_N \rightarrow 0$ en $\sigma_N^2 \rightarrow 1$. Bijgevolg wordt dit in de limiet de standaardnormale verdeling.

5. (X_1, X_2, X_3, X_4) is multivariaat normaal verdeeld met verwachting nul en covariantiematrix C gegeven door

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

- Geef de onafhankelijkheidsrelaties van de stochasten (X_1, X_2, X_3) .
- Voor welke waarde(n) van a zijn de stochasten $aX_2 + X_3$ en $X_2 + aX_3$ onafhankelijk?
- Voor welke strikt positieve waarden van α, β, γ is de stochast

$$Y = \alpha X_1^2 + \beta(X_2 + 2X_3)^2 + \gamma X_4^2$$

χ^2 verdeeld, en met hoeveel vrijheidsgraden?

6. Een Markov keten met toestandsruimte $S = \{1, 2, 3\}$ heeft overgangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

- Bepaal de stationaire verdeling. Is er een unieke stationaire verdeling?

$$(\mu_1 \mu_2 \mu_3) \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = (\mu_1 \mu_2 \mu_3)$$

en $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3$ geeft als unieke oplossing $\frac{1}{21}(9, 4, 8)$.

- We spelen het volgende spel gebaseerd op de Marko keten. Indien de Markov keten in toestand 1 is verliest de speler 2 (euro), indien de Markovketen in toestand 3 of 2 is, wint de speler 1 euro. We starten de Markovketen uit toestand 1, en noemen W_n de winst op tijdstip n . Bereken de “asymptotische verwachte winst per tijdseenheid”

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \mathbb{E}(W_n)$$

In deze limiet convergeert de Markov keten naar zijn unieke stationaire verdeling. I.e., deze limiet is

$$-2\mu_1 + 1\mu_2 + 1\mu_3 = \frac{1}{21}((-2)(9) + 4 + 8) = \frac{-6}{21}$$

- c) Indien de Markovketen start uit toestand 2, bereken dan de kans dat toestand 1 eerder bereikt wordt dan toestand 3.

Noemen we deze kans x dan voldoet de kolomvector

$$f = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$$

aan de vergelijking $P^* f = f$ waarbij P^* de overgangs matrix is waarbij de toestanden 1 en 3 absorberend gemaakt zijn. I.e.,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$$

dit geeft $x = 2/3$.

7. Zijn de volgende beweringen juist of fout? Geef een (bondig) argument.

- a) Voor onafhankelijke en gelijk verdeelde positieve stochasten $X_i, i = 1, 2, 3, \dots$, waarvoor geldt $P(X_i \geq x) = 1/x^2$, kunnen we de centrale limietstelling toepassen.

Fout deze stochasten hebben geen eindige variantie: immers de kansdichtheid is $2/x^3$ en de integraal $\int_1^\infty x^2/x^3 = \infty$

- b) Disjuncte gebeurtenissen zijn altijd onafhankelijk.

Fout indien $P(A) \neq 0$ en $P(A^c) \neq 0$ en A^c dan

$$P(A \cap A^c) = P(\emptyset) = 0 \neq P(A)P(A^c)$$

- c) Een verzekeringsmaatschappij heeft 20000 verzekerden voor brand. De kans op een brand in de loop van een jaar wordt geschat op 10^{-4} . Het aantal schadegevallen als gevolg van brandschade is dan benaderend Poisson verdeeld met parameter $\lambda = 2$.

Dit is correct De werkelijke verdeling is binomiaal met $n = 20000$ en $p = 10^{-4}$, wat benaderend Poisson verdeeld is met parameter $\lambda = np = 2$

- d) Indien A en B onafhankelijke gebeurtenissen zijn met gelijke kans, dan geldt

$$P(A|A \cup B) = \frac{1}{2}$$

Fout

$$P(A|A \cup B) = \frac{P(A)}{P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

stellen we $x = P(A) = P(B)$ dan geldt

$$P(A|A \cup B) = \frac{x}{x + x - x^2}$$

en dit is in het algemeen niet $1/2$.