

Tentamen Inleiding Kansrekening WI1614.
6 juli 2012, 9:00-12:00

- Het tentamen bestaat uit 26 onderdelen. Met elk onderdeel kan maximaal 2 punten verdiend worden, behalve de twee onderdelen met een *: met deze kan hoogstens 1 punt verdiend worden.
- Het tentamen bestaat uit twee delen: deel 1 betreft de stof van de toets (deel 1 = 25 punten), deel 2 het vervolg (eveneens 25 punten).
- Het eindcijfer wordt berekend zoals uitgelegd op blackboard: studenten die tevreden zijn met hun toetscijfer hoeven dus deel 1 niet te maken.
- Het tentamen is open boek. Boeken, nota's en een (eventueel grafische) rekenmachine mogen gebruikt worden.

Deel 1.

1. Bij controle van kilometertelling van taxichauffeurs wordt een test gebruikt die fraude detecteert. Idee van deze test is dat “verzonnen trajecten” meer patronen vertonen dan echte trajecten. Indien de chauffeur fraudeert dan is het resultaat van de test met 90% kans positief. Indien de chauffeur toevallige vergissingen maakt dan is het resultaat van de test met 9% kans positief. Indien tenslotte de chauffeur een correcte kilometertelling opgeeft, dan is het resultaat van de test met 1% kans positief.

Uit onderzoek blijkt dat 90% een correcte kilometertelling opgeeft, 7% maakt toevallige vergissingen, en 3% fraudeert.

- a) Wat is de kans dat een willekeurig geselecteerde chauffeur een positief testresultaat heeft?
- b) Een chauffeur heeft een positief testresultaat. Wat is de kans dat hij een vergissing gemaakt heeft?
- c) Een chauffeur voor wie de test positief was, eist een tweede onafhankelijke test. Voor deze tweede test geldt dat in geval van fraude met 95% kans de test positief is, in geval van een vergissing met 4% en in geval van een eerlijke telling met 1% positief. Deze test wordt uitgevoerd en het resultaat is negatief. Wat is de kans dat de chauffeur toch gefraudeerd heeft?

2. X is een continue stochast met cumulatieve verdelingsfunctie gegeven door

$$F_X(x) = \begin{cases} a & \text{indien } x < 0 \\ C \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^6}{6} \right) & \text{indien } 0 \leq x \leq 1 \\ b & \text{indien } x \geq 1 \end{cases} \quad (1)$$

- a) Bepaal de waarden van de constanten a, b, C zodanig dat F_X een cumulatieve kansverdeling is.
 - b) Bereken de bijbehorende kansdichtheid.
 - c) Bereken de verwachting en de variantie van X .
 - d) Bepaal de kansdichtheid van $Y = -\ln(X^2)$.
3. Een continue tweedimensionale stochast (X, Y) heeft kansdichtheid gegeven door

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 9xy^2 - 6x^3y^2 - 6xy^5 + 12x^3y^5 & \text{voor } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{elders} \end{cases} \quad (2)$$

- a) Bereken de marginale kansdichtheid van X en Y .
 - b) Bereken de kans $P(X \leq Y)$.
 - c) Bereken de conditionele verwachting $\mathbb{E}(X|Y)$.
4. Zijn de volgende beweringen juist of fout? Geef een (bondig) argument.
- a) X is Poisson verdeeld, met $\mathbb{E}(X^2) = 2$. Dan geldt $P(X = 0) = e^{-1}$.
 - b) X en Y zijn onafhankelijk en uniform verdeeld op het interval $[0, 1]$. Dan zijn $X + Y$ en $X - Y$ niet gecorreleerd en niet onafhankelijk.
 - c*) X is standaard normaal verdeeld, Y is exponentieel verdeeld met parameter $\lambda = 1$ en onafhankelijk van X . Dan geldt dat de variantie van $2X - Y + 3$ gelijk is aan 5.

Deel 2

5. De momentgenererende functie van een stochast X wordt gegeven door

$$M_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX}) = \left(\frac{2}{2-t}\right)^3, \quad t \in (-\infty, 2)$$

- a) Bereken de verwachting $\mathbb{E}(X)$, en het derde moment $\mathbb{E}(X^3)$.
b) Zijn X' een stochast, onafhankelijk van X , met dezelfde verdeling (als X). Definieer $Y = 3X + 4X' + 5$. Bereken de momentgenererende functie van Y , i.e., $M_Y(t) = \mathbb{E}(e^{tY})$ voor $t < 1/2$.
6. $X_i, i \in \mathbb{N}$ zijn onafhankelijke stochasten met $\mathbb{E}(X_i) = \mu$ en $\text{Var}(X_i) = \sigma_i^2$. Voor σ_i^2 geldt

$$\sigma_i^2 = \begin{cases} 1 & \text{indien } i \text{ even} \\ 2 & \text{indien } i \text{ oneven} \end{cases}$$

- a) Toon aan dat het gemiddelde $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ in kans convergeert naar μ (als $n \rightarrow \infty$).
b) Indien we nu bovendien aannemen dat X_i normaal verdeeld zijn, geef dan aan voor welke constante a

$$\frac{1}{\sqrt{an}} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)$$

in verdeling convergeert naar een standaard normaal verdeelde stochast (als $n \rightarrow \infty$).

7. (X_1, X_2, X_3) is multivariaat normaal verdeeld met verwachting $(0, 0, 0)$ en covariantiematrix

$$C = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (3)$$

Hierbij is $a \in [-1, 1]$ een parameter.

- a) Geef, als functie van a de onafhankelijkheidsrelaties tussen de stochasten (X_1, X_2, X_3) .
b) Toon aan dat voor alle $a \in [-1, 1]$, de stochasten $Y_1 = X_1 - X_2$ en $Y_2 = X_1 + X_2$ onafhankelijk zijn.

- c) We kiezen nu $a = 1/2$. Voor welke strikt positieve waarden van α, β, γ is de stochast

$$\alpha(X_1 - X_2)^2 + \beta(X_1 + X_2)^2 + \gamma X_3^2$$

χ^2 -verdeeld, en met hoeveel vrijheidsgraden?

8. Een random wandeling op de complete graaf op vier punten is een Markov keten op de toestandruimte $S = \{1, 2, 3, 4\}$, met overgangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

We noteren $X_0, X_1, X_2, \dots$ de bijbehorende Markovketen.

- a) Toon aan dat deze Markovketen aperiodisch en irreducibel is, en bepaal de stationaire verdeling.
- b) Bereken de kans

$$\mathbb{P}(X_7 = X_5 = 4 | X_3 = 1, X_2 = 3, X_1 = 2, X_0 = 4)$$

- c) We maken de wandeling nu asymmetrisch en bovendien maken we de toestanden 3 en 4 absorberend. De nieuwe overgangsmatrix is gegeven door

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bereken de kans dat, vertrekkend van de toestand 2, de toestand 4 eerder getroffen wordt dan de toestand 3.

9. Zijn de volgende beweringen juist of fout? Geef een (bondig) argument.
- a) De functie $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven door $f(t, s) = e^{t^2 + s^2 - 4ts}$ is de moment genererende functie van een tweedimensionale multivariaat normaal verdeelde stochast.
- b*) Zij P een overgangsmatrix en stel dat voor een gegeven verdeling μ geldt dat $\nu := \lim_{n \rightarrow \infty} \mu P^{2n}$ bestaat. Dan geldt dat ν een invariante verdeling is.
- c) $X_n, Y_n, n \in \mathbb{N}$ zijn positieve en begrensde stochasten. Er geldt $X_n \rightarrow X$ en $Y_n \rightarrow Y$ in kans, als $n \rightarrow \infty$. Dan geldt $X_n Y_n \rightarrow XY$ in kans als $n \rightarrow \infty$.