

Toets Inleiding Kansrekening WI1614.
3 april 2012 Zaal DTC 1

- Het tentamen bestaat uit 15 onderdelen. Met elk onderdeel kan maximaal 2 punten verdiend worden.
- Het tentamen is open boek. Boeken, nota's en een (eventueel grafische) rekenmachine mogen gebruikt worden.

-
1. In een bepaald land zijn er 10% zware rokers, 20% matige rokers en 70% niet rokers. De kans dat een random geselecteerd iemand uit dit land longkanker krijgt is gelijk aan 0.03. Verder is het een algemeen gegeven dat matige rokers vijf maal grotere kans hebben op longkanker en zware rokers een tienmaal hogere kans (dan niet rokers).

- a) Bereken de kans dat een niet roker longkanker krijgt.

Noem L de gebeurtenis “persoon krijgt longkanker”, Z , persoon is zware roker N persoon is niet-roker, M persoon is matige roker. Er geldt

$$0.03 = P(L) = P(Z)P(L|Z) + P(M)P(L|M) + P(N)P(L|N) = (0.1)10P(L|N) + (0.2)5P(L|N)$$

wat geeft

$$P(L|N) = \frac{0.03}{2.7} = \frac{1}{90}$$

- b) Bereken de kans dat iemand die longkanker krijgt een zware roker is.

Dit is de conditionele kans $P(Z|L)$. Uit Bayes volgt

$$P(Z|L) = \frac{P(L|Z)P(Z)}{P(L)} = \frac{10(1/90)(0.1)}{0.03} = \frac{10}{27}$$

2. Een continue stochast X heeft de kansdichtheid

$$f_X(x) = \begin{cases} C(\sqrt{x} - x^2) & \text{voor } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{elders} \end{cases} \quad (1)$$

- a) Bereken de constante C en toon aan dat (voor de correcte waarde van C) f_X wel degelijk een kansdichtheid definieert.

Omdat $\sqrt{x} \geq x^2$ voor $x \in [0, 1]$ (nl. $x \geq x^4$ omdat $1 \geq x^3$), geldt $f_X \geq 0$. De constante C wordt dan bepaald door te eisen dat

$$C \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx = C((2/3) - (1/3)) = 1$$

wat geeft $C = 3$.

- b) Bereken de cumulatieve verdelingsfunctie $F_X(x) = P(X \leq x)$.
 Voor $x < 0$ is $F_X(x) = 0$, voor $x \geq 1$ is $f_X(x) = 1$ en voor $x \in [0, 1]$ is

$$F_X(x) = \int_0^x 3(\sqrt{x} - x^2) dx = 2x^{3/2} - x^3$$

- c) Bereken de verwachting van X .

$$E(X) = \int_0^1 x 3(\sqrt{x} - x^2) dx = 3 \int_0^1 (x^{3/2} - x^3) dx = 3(2/5 - 1/4) = 9/20$$

- d) Zij U een uniform verdeelde stochast op het interval $[0, 1]$. Voor welke functie $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ heeft $g(U)$ dezelfde verdeling als X ?

Dit is de inverse verdelingsfunctie $g(y) = F_X^{-1}(y)$. Noem $x = F_X^{-1}(y)$ dan geldt

$$2x^{3/2} - x^3 = y$$

stel $x^{3/2} = u$ dan geeft dit

$$u^2 - 2u + y = 0$$

wat geeft

$$u = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4y}}{2}$$

de plus vervalt omdat u in $[0, 1]$ moet liggen, en we krijgen dus

$$g(y) = \left(1 - \sqrt{1 - y}\right)^{2/3}$$

- e) Bereken de kansdichtheid van $Y = -\ln(X)$.

Bereken eerst verdelingsfunctie

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(-\ln(X) \leq y) = P(X \geq e^{-y}) = 1 - (2e^{-3y/2} - e^{-3y})$$

afleiden geeft dan de kansdichtheid

$$f_Y(y) = 3e^{-3y/2} - 3e^{-3y}$$

3. Een tweedimensionale continue stochast heeft de kansdichtheid

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 4x^3 + 4xy - 8x^3y & \text{voor } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{elders} \end{cases}$$

- a) Bereken de marginale kansdichtheden van X en Y . voor $x \in [0, 1]$

$$f_X(x) = \int_0^1 (4x^3 + 4xy - 8x^3y) dy = 4x^3 + 2x - 4x^3 = 2x$$

elders is $f_X(x) = 0$. Voor $y \in [0, 1]$

$$f_Y(y) = \int_0^1 (4x^3 + 4xy - 8x^3y) dx = 1 + 2y - 2y = 1$$

elders is $f_Y(y) = 0$.

- b) Bereken de covariantie van X en Y .

$$E(X) = \int_0^1 x f_X(x) dx = \int_0^1 x 2x dx = 2/3, E(Y) = \int_0^1 y f_Y(y) dy = \int_0^1 y dy = 1/2$$

Verder

$$E(XY) = \int_0^1 \int_0^1 xy(4x^3 + 4xy - 8x^3y) dx dy = 14/45$$

dus

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = -1/45$$

- c) Zijn X en Y onafhankelijk? Beargumenteer uw antwoord.

Neen omdat de covariantie niet nul is.

- d) Bereken de conditionele kansdichtheid van Y , gegeven $X = x$.
voor $y \in [0, 1]$ is deze

$$f_{Y|X=x}(y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_X(x)} = 2x^2 + 2y - 4x^2y$$

elders is $f_Y(y) = 0$.

- e) Bereken $\mathbb{E}(Y|X)$.

$$E(Y|X = x) = \int_0^1 y f_{Y|X=x}(y) dy = \int_0^1 y(2x^2 + 2y - 4x^2y) dy = \frac{2}{3} - \frac{x^2}{3}$$

Bijgevolg

$$E(Y|X) = \frac{2}{3} - \frac{X^2}{3}$$

4. Zijn de volgende uitspraken juist of fout? Beargumenteer uw antwoord.

- a) A en B zijn onafhankelijke gebeurtenissen met identieke kans. Bovendien is de kans $P(A \cup B)$ gelijk aan 1. Dan geldt $P(A) = P(B) = 1$.

Stel $P(A) = P(B) = x$. Er geldt, gebruik makend van de gegevens, en omdat A, B onafhankelijk zijn

$$1 = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) = 2x - x^2$$

wat geeft $(x - 1)^2 = 0$, dus $x = 1$; de uitspraak is dus juist.

- b) Uit een onderzoek naar opinies voor of tegen betreffende twee onderwerpen hebben we de volgende gegevens. De kans dat iemand in beide onderwerpen tegen is, is dezelfde als in beide onderwerpen voor, en gelijk aan $2/5$. De kans dat iemand in het ene onderwerp voor en het andere onderwerp tegen is, is gelijk aan $1/10$. Bijgevolg zijn de opinies over beide onderwerpen afhankelijk.

Deze uitspraak is juist. De kans dat de persoon voor is in onderwerp 1 is $2/5 + 1/10 = 1/2$, idem voor onderwerp 2. De kans dat hij voor is in beide onderwerpen is $2/5$, wat niet gelijk is aan $(1/2)(1/2)$.

- c) De tijd dat een elastisch materiaal een bepaalde druk kan weerstaan zonder te breken kan goed gemodelleerd worden met een exponentieel verdeelde stochast.

Deze uitspraak is fout: indien het materiaal een tijd druk weerstaan heeft wordt de kans kleiner dat het de druk nog langer kan weerstaan. Dit is in strijd met de geheugenloosheid van de exponentële verdeling.