

Oefententamen Inleiding Kansrekening, Wi1614

May 29, 2009

1. Beschouw een vertakkingsproces met als offspring-verdeling een binomiale verdeling met parameters 2 en p .
 - a. Bereken de uitsterfkans, startend met één individu.
 - b. Veronderstel, dat inplaats van te starten met een individu, de begin populatie nu bestaat uit een random aantal Z_0 , dat Poisson verdeeld is met parameter λ . Laat zien dat voor $p > \frac{1}{2}$, de uitsterfkans gegeven wordt door:

$$e^{\lambda(\pi_0-1)},$$

met π_0 het antwoord van onderdeel a.

2. Een kapperszaak, waar alléén de eigenaar zelf knipt heeft ruimte voor ten hoogste 2 klanten. Potentiële klanten arriveren volgens een Poisson proces met intensiteit 3 per uur. De kniptijden zijn onafhankelijk en exponentieel verdeeld met een gemiddelde van een kwartier. Klanten, die arriveren als de kapperszaak vol is, gaan vertrekken onmiddellijk en komen niet opnieuw.
 - a. We modelleren het aantal klanten als een continue-tijd Markov keten. Geef de Q -matrix.
 - b. Welk percentage van de potentiële klanten gaat (nadat het begingedrag van de keten is uitgewist) ook werkelijk naar binnen om geknipt te worden?
3. (a) De levensduurverdeling van een machine (in dagen) is een stochastische variabele T met kansmassafunctie p_T . Als gegeven is dat de machine nog steeds werkt na t met $0 \leq t \leq N$ dagen, wat is dan de gemiddelde resterende levensduur indien

$$p_T(a) = \frac{1}{N+1} \quad a \in \{0, 1, \dots, N\}.$$

- (b) Een dobbelsteen wordt 5 maal gegooid. Wat is de kans dat de som van de uitkomsten gelijk is aan 15?

Uitwerkingen

1. a. π_0 is de kleinste niet-negatieve oplossing van de vergelijking $G(s) = s$. Voor $p \leq \frac{1}{2}$ geldt dat de gemiddelde offspring gelijk is aan: $\mu = 2p$, en de berekening op pagina 21 zegt $\pi_0 = 0$ voor $\mu = 2p \leq 1$.

Voor $p > \frac{1}{2}$ kunnen we de vergelijking $G(s) = s$ herschrijven als:

$$(1-p)^2 + 2p(1-p)s + p^2s^2 = s \quad \text{ofwel} \\ s^2 + \{2p(1-p) - 1\}s/p^2 + (1-p)^2/p^2 = 0.$$

Aangezien $s = 1$ en $s = \pi_0$ de enige 2 oplossingen van deze vergelijking zijn moet noodzakelijk: $\pi_0 = (1-p)^2/p^2$, aangezien $(1-p)^2/p^2$ gelijk is aan het product van de wortels.

- b. Gegeven $Z_0 = k$ is de uitsterfkans gelijk aan

$$\pi_0^k$$

Hieruit volgt direct dat de uitsterfkans gegeven wordt door

$$\mathbf{E}(\pi_0^{Z_0}) = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_0^k e^{-\mu} \frac{\mu^k}{k!} = e^{-\mu} e^{\pi_0 \mu}.$$

2. a. De Q -matrix wordt gegeven door:

$$Q = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 4 & -7 & 3 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

- b. Dit percentage is 100% keer $1 - \pi_2$. $\pi_0 = \frac{16}{37}$, $\pi_1 = \frac{12}{37}$ en $\pi_2 = \frac{9}{37}$. Antwoord 100% maal $\frac{28}{37}$ ofwel 76%.
3. a. De levensduur verdeling is opnieuw diskreet uniform verdeeld over de getallen $\{t+1, t+2, \dots, N\}$, zodat het gemiddelde wordt:

$$(N + t + 1)/2.$$

- b. De kansgenererende functie van een worp is:

$$\frac{1}{6}\{s + \dots + s^6\} = \frac{s(1-s^6)}{6(1-s)}, \quad s \in (0, 1).$$

De kansgenererende functie van $X_1 + \dots + X_5$ is dus

$$\left(\frac{s(1-s^6)}{6(1-s)}\right)^5 = a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots$$

Gevraagd wordt nu de coefficient a_{15} van s^{15} . Merk nu op dat

$$(1-s)^{-5} = 1 - \binom{-5}{1}s + \binom{-5}{2}s^2 - \dots,$$

waarbij $\binom{-5}{k} = (-5)(-6)\dots(-5-k+1)/k!$. Verder geldt:

$$(1-s^6)^5 = 1 - 5s^6 + 10s^{12} + \dots$$

Tezamen vinden we dus:

$$a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots = \frac{s^5}{6^5} (1 - 5s^6 + 10s^{12} + \dots) \left(1 - \binom{-5}{1} s + \binom{-5}{2} s^2 - \dots \right)$$

Vergelijken van coëfficiënten geeft (Maple gebruikt voor de berekening van de binomiaal coëfficiënten):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{6^5} \left\{ -\binom{-5}{10} + 5\binom{-5}{4} \right\} \\ &= \frac{1}{6^5} \left\{ \binom{14}{4} - 5\binom{8}{4} \right\} = \frac{651}{7776} = 0.0837. \end{aligned}$$