

Toets 4 Inleiding Kansrekening wi1614

Rice Chapter 1-5, Markov chains Chapter 1

11 mei 2011, 14:45-15:30 uur

Bij deze toets is het gebruik van een (eventueel grafische) rekenmachine en van het formuleblad wi1614 toegestaan.

Normering: Elke meerkeuzevraag telt voor 2 punten. Open vraag 1 en 2 tellen elk voor 3 punten. Je krijgt 2 punten cadeau. Cijfer: aantal punten gedeeld door 1,8. Bonusvraag goed geeft maximaal cijfer + 1/4.

Meerkeuze vragen

Toelichting: Zet je antwoorden achter elkaar bovenaan je inleverblad, zoals bijvoorbeeld

1. b 2. d 3. c 4. f 5. a.

1. De continue stochast X heeft kansdichtheid

$$f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2}, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & x < 0 \text{ of } x > 1 \end{cases}$$

Dan is de verwachting van X gelijk aan

- a) 2/12 b) 3/12 c) 4/12 d) 5/12 e) 1/2 f) 7/12

2. Stel dat de stochasten X en Y het aantal successen respectievelijk het aantal mislukkingen zijn bij 10 onafhankelijke experimenten met kans $\frac{4}{5}$ op succes in elk experiment. Dan is $\text{Var}(X - Y)$ gelijk aan

- a) 0 b) 16/5 c) 32/5 d) 56/5 e) 24/5 f) 8/5

3. Zij $M(t)$ de momentgenererende functie van een stochast X . De momentgenererende functie van de stochast $Y = 2X + 1$ wordt gegeven door

- a) $2M(t) + 1$ b) $M(t) + 2$ c) $e^t M(2t)$ d) $M^2(t) + 1$ e) $M(2t) + 1$ f) $e^{2t} M(t)$

4. Beschouw onafhankelijke stochasten $Z_1, Z_2, \dots$ met een standaard normale verdeling: $Z_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Definieer de stochast

$$Q_n = Z_1^2 + Z_2^2 + \dots + Z_n^2.$$

Er geldt dat $\frac{Q_n - n}{\sqrt{cn}}$ in verdeling naar een standaard normale verdeling convergeert als $n \rightarrow \infty$. Wat is de constante c ?

Aanwijzing: Men kan uitrekenen dat $\int_{-\infty}^{\infty} z^4 e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = 3\sqrt{2\pi}$.

- a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{3}$ c) 1 d) 2 e) 3 f) 9

5. Classificeer de toestanden van de Markov-keten op $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ met overgangsmatrix

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & 0 & \frac{7}{8} \end{pmatrix}$$

We korten een ‘klasse van communicerende toestanden’ af tot ‘KCT’. Er blijkt dat

- a) S is irreducibel b) $\{3, 4, 6\}$ is een KCT c) $\{1, 2, 4, 5, 6\}$ is een KCT
d) $\{1, 3, 6\}$ is een KCT e) $\{1, 2, 5\}$ is een KCT f) $\{1, 2, 3, 6\}$ is een KCT

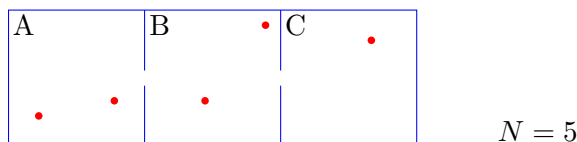
Open vragen

Toelichting: Een antwoord alleen is *niet* voldoende: er dient een berekening, toelichting en/of motivatie aanwezig te zijn.

1. Laat $X_1, X_2, \dots$ een rij onafhankelijke stochasten zijn allemaal met verwachting μ en variantie σ^2 . Laat $Y_1, Y_2, \dots$ een rij onafhankelijke Bernoulli stochasten zijn allemaal met parameter p . Gegeven is ook dat de rij $X_1, X_2, \dots$ onafhankelijk is van de rij $Y_1, Y_2, \dots$. Wat zegt de Wet van de Grote Aantallen over het gedrag van

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i Y_i \quad \text{als } n \rightarrow \infty?$$

2. We bekijken een Ehrenfest model met N moleculen verdeeld over drie kamers A en B en C met een kleine opening er tussen, als in de figuur.



Op elk tijdstip gaat willekeurig één van de N moleculen door één van de twee gaten, dat wil zeggen: als het molecuul in A of C zit gaat het naar B, als het in B zit gaat het met gelijke kansen naar A of naar C.

Geef een toestandruimte, en de matrix van overgangskansen voor dit proces als het aantal moleculen $N = 2$. *Dringende hint: schrijf de toestanden niet als natuurlijke getallen, maar codeer ze met vectoren van lengte 3.*

Bonusvraag

We gaan door met Open vraag 2.b. Stel dat we één molecuul van de N bekijken, en dan alleen op de tijdstippen dat het van kamer wisselt. Beschrijf het gedrag van dat ene molecuul met een Markovketen.

Antwoorden MK Vragen:

1 f Want $\int_0^1 x(x + \frac{1}{2})dx = 7/12$.

2 c Want $\text{Var}(X - Y) = \text{Var}(2X - 10) = 4\text{Var}(X) = 4 \cdot 10 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{32}{5}$.

3 c Want $E[e^{(2X+1)t}] = e^t E[e^{2tX}]$.

4 d Want $c = \text{Var}(Z_1^2) = E[Z_1^4] - (E[Z_1^2])^2 = 3 - 1 = 2$.

5 e Want de drie klassen zijn $\{1, 2, 5\}$, $\{3\}$, en $\{4, 6\}$.

Antwoorden Open Vragen:

1 Dat convergeert in kans naar $E[X_1 Y_1] = E[X_1] E[Y_1] = p\mu$.

2 Laat de toestanden $(2, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$, $(0, 0, 2)$, $(1, 1, 0)$, $(0, 1, 1)$ en $(1, 0, 1)$ zijn (met de voor de hand liggende codering). Dan is P :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Antwoord Bonusvraag:

We nemen $S = \{A, B, C\}$: de drie kamers waar het molecuul kan zijn. Overgangsmatrix:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$