

Inleiding Kansrekening wi1614

Toets 3 over Chapter 1–4 uit Rice

Dinsdag 29 maart 2011, 10.45–12.45 uur

Toelichting: Normering: elke meerkeuze vraag telt voor 1 punt. De twee open vragen tellen elk voor 2 punten. Het cijfer is het aantal punten plus 1 gedeeld door 15. Bonusvraag goed geeft cijfer +1.

1. Als $P(A) = 0.3$ en $P(B) = 0.6$, dan is

- a) $P(A \cup B) \leq 0.8$ b) $P(A \cap B) \geq 0.3$ c) $P(A \cap B^c) \leq 0.2$
d) $P(B \cap A^c) \geq 0.3$ e) $P(A \cup B) \geq 0.5$ f) $P(A \cap B) \leq 0.2$

2. Laten A, B en C willekeurige gebeurtenissen zijn. Dan is $P(A \cap B|C)$ gelijk aan

- a) $P(A|C)P(B|C)$ b) $P(A|B \cap C)P(B|C)$ c) $P(A \cap C)P(B|C)$
d) $P(A|B \cap C)$ e) $P(A|B)P(B|C)$ f) $P(A \cap B \cap C)$

3. We doen 21 onafhankelijke worpen met een zuivere munt. De kans dat een even aantal keren munt boven is gekomen (0 is ook even) is

- a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{2} - \frac{1}{21}$ c) $\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{21}$ d) $\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{20}$ e) $\frac{1}{2} - \frac{1}{10}$ f) $\frac{1}{2} - \frac{1}{11}$

4. De stochastische variabele V heeft continue kansdichtheid

$$f_V(v) = \begin{cases} 5v^4 & \text{als } 0 \leq v \leq 1 \\ 0 & \text{elders} \end{cases}$$

Bereken $P(V \geq \frac{9}{10})$ in 3 decimalen nauwkeurig.

- a) 0.237 b) 0.382 c) 0.477 d) 0.409 e) 0.285 f) 0.342

5. Laten X en Y stochasten zijn met $X \leq Y$. Dan geldt

- a) $E[X] \leq E[Y]$ én $\text{Var } X \leq \text{Var } Y$ b) $E[X] \geq E[Y]$ én $\text{Var } X \leq \text{Var } Y$
c) $E[X] \leq E[Y]$ én $\text{Var } X \geq \text{Var } Y$ d) $E[X] \geq E[Y]$ én $\text{Var } X \geq \text{Var } Y$
e) $E[X] \geq E[Y]$ én $E[X^2] \geq E[Y^2]$ f) alle 5 vorige alternatieven zijn onjuist

6. Iemand gooit met een onzuivere munt. Als hij een kruis krijgt (met kans $\frac{2}{3}$) dan gooit hij met één dobbelsteen. In het geval dat hij een munt krijgt (kans $\frac{1}{3}$) gooit hij met twee dobbelstenen. Wat is het verwachte aantal ogen?

- a) $\frac{7}{3}$ b) $\frac{14}{3}$ c) 7 d) $\frac{20}{3}$ e) $\frac{19}{3}$ f) $\frac{11}{3}$

7. Het aantal drukfouten in een boek wordt beschreven met een Poisson proces. Stel dat gegeven is dat er gemiddeld 2 drukfouten op een pagina staan. Wat is de kans dat op de eerste twee pagina's precies 2 fouten staan?

- a) $2e^{-4}$ b) $4e^{-2}$ c) $8e^{-2}$ d) $8e^{-4}$ e) $4e^{-4}$ f) $2e^{-2}$

8. Laat (X, Y) gemeenschappelijke dichtheid

$$f_{X,Y}(x, y) = 4xye^{-x^2-y^2} 1_{[0,\infty)}(x) 1_{[0,\infty)}(y)$$

hebben. Dan is de dichtheid f_U van $U = X^2 + Y^2$ voor $u > 0$ gelijk aan

- a) e^{-u} b) ue^{-u} c) $\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-u^2}$ d) $\frac{1}{2}u^2e^{-u}$ e) $\frac{1}{2}u^{-2}e^{-u}$ f) u^3e^{-u}

N.B. Let op de grenzen van de variabelen bij het transformeren.

9. De discrete stochastische variabele X heeft een geometrische verdeling met parameter $p = \frac{1}{80}$. Dan geldt dat $E[X | X \geq 50]$ gelijk is aan

- a) 96 b) 105 c) 110 d) 115 e) 121 f) 129

N.B. U mag (event.) gebruik maken van de formule $(1-x)^2 \sum_{k=N}^{\infty} kx^k = x^N(N(1-x) + x)$.

10. De onafhankelijke stochasten U en V zijn gegeven door

$$P(U = 0) = \frac{1}{2}, \quad P(U = 1) = \frac{1}{2}$$

$$P(V = 1) = \frac{1}{2}, \quad P(V = 2) = \frac{1}{2}$$

Dan is $\frac{1}{4}e^t + \frac{1}{2}e^{2t} + \frac{1}{4}e^{3t}$ de momentgenererende functie van

- a) $2U + 1$ b) $2V - 1$ c) $U + V$ d) UV e) V^2 f) $2U + V$

Open Vragen

Toelichting: Elk antwoord dient voorzien te zijn van een berekening, toelichting en/of argumentatie.

- Iemand heeft een merkwaardige dobbelsteen waar i.p.v. de aantallen ogen 1,2,3,4,5,6 de aantallen ogen 1,3,4,5,6,8 op voorkomen. Vind een manier om ogen op een tweede dobbelsteen te zetten zó, dat als deze samen met de $\{1, 3, 4, 5, 6, 8\}$ dobbelsteen geworpen wordt de uitkomst (de som van de ogen) precies dezelfde kansverdeling heeft als bij een worp met twee *gewone* dobbelstenen. (We gaan er van uit dat er bij alle genoemde dobbelstenen er kans $\frac{1}{6}$ is dat een bepaalde kant boven komt te liggen.)
- Stel dat X en Y discrete stochasten zijn met waarde in $\{0, 1, 2\}$. Van de simultane verdeling is gegeven dat

		x			
		0	1	2	
	0	$\frac{5}{36}$	$\cdot$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{3}$
y	1	0	$\frac{4}{36}$	$\cdot$	$\frac{1}{3}$
	2	$\cdot$	$\frac{2}{36}$	$\cdot$	$\cdot$
		$\frac{1}{3}$	$\cdot$	$\cdot$	1

- Voltooi de tabel.
- Bereken de verwachting van X , van Y en de covariantie tussen X en Y .
- Zijn X en Y onafhankelijk?

Bonusvraag: De (X_i) zijn onafhankelijk en $Ber(p)$ verdeeld. Wat is $E\left[\sum_{i=1}^n X_i\right]$? (np^2 is fout!).

Antwoorden MK Vragen:

1 d *én e* Want $P(A^c) = 0.7$, dus $P(B) + P(A^c) = 1.3$, waaruit volgt $P(B \cap A^c) \geq 0.3$. Ook is $P(A \cup B) \geq \max\{P(A), P(B)\} = 0.6$ (en alle overige alternatieven zijn onjuist i.h.a.).

2 b: $P(A \cap B|C) = P(A \cap B \cap C) / P(C) = P(A|B \cap C) P(B \cap C) / P(C) = P(A|B \cap C) P(B|C)$.

3 a: Want het aantal keren munt X is binomiaal verdeeld dus $P(X = k) = P(X = 21 - k)$ voor $k = 0, \dots, 21$ en k is even d.e.s.da. $21 - k$ oneven is.

4 d: Dit is $\int_{9/10}^1 5v^4 dv$.

5 f: Want $X \leq Y$ impliceert $E[X] \leq E[Y]$, maar zegt niets over de varianties.

6 b: Want als A het aantal ogen is, en X de uitkomst van de muntworp, dan is $E[A] = E[E[A|X]] = \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{2} + \frac{1}{3} \cdot 7 = \frac{14}{3}$.

7 d: Want dit aantal is Poisson verdeeld met parameter $2 \cdot 2 = 4$.

8 b: Transformeer met $g(x, y) = (x^2 + y^2, y) = (u, v)$. Dan is $v = y$ en $x = \sqrt{u - v^2}$, en is $u \geq v^2$. De Jacobiaan van g is $2x$. Dus

$$f_{U,V}(u, v) = 4xve^{-u}1_{(0,\infty)}(u)1_{(0,\sqrt{u})}(v)/2x = 2ve^{-u}1_{(0,\infty)}(u)1_{(0,\sqrt{u})}(v).$$

Uit integreren over v geeft $f_U(u) = ue^{-u}1_{(0,\infty)}(u)$.

Handiger: X en Y zijn kennelijk onafhankelijke stochasten, allebei met dichtheid $2xe^{-x^2}1_{[0,\infty)}(x)$. Maar dan zijn X^2 en Y^2 exponentieel met parameter 1 verdeeld, en is $X^2 + Y^2$ (als onafhankelijke som van exponentiëlen) Gamma(1,2) verdeeld.

9 f: Want voor $k \geq 50$ is $P(X = k|X \geq 50) = P(X = k) / P(X \geq 50) = p(1 - p)^{k-50}$. Dus $E[X|X \geq 50] = \sum_{50}^{\infty} kp(1 - p)^{k-50} = 129$.

Handiger: De geometrische verdeling is geheugenloos. Het nulpunt verschuift naar 49, dus $E[X|X \geq 50] = 49 + 80 = 129$.

10 c: Want $M_U(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^t$ en $M_V(t) = \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{2t}$.

Antwoorden Open Vragen:

1 De dobbelsteen met ogen $\{1, 2, 2, 3, 3, 4\}$. (1 en 4 precies 1 keer omdat het laagste aantal (1) en het hoogste aantal (12) precies één keer moeten voorkomen, dan kunnen alleen nog 2 en 3 en deze moeten beide 2 keer voorkomen (bekijk de aantallen 3 en 11); ook de overige aantallen blijken dan te kloppen.)

2 a. $P(X = 1, Y = 0) = \frac{6}{36}$, $P(X = 1) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$, etc.

b. $E[X] = E[Y] = 1$, $\text{Cov}(X, Y) = 1 - 1 = 0$.

c. Nee, bijvoorbeeld $P(X = 0, Y = 1) = 0 \neq \frac{1}{9} = P(X = 0)P(Y = 1)$.

Bonusvraag Er waren natuurlijk punten te verdienen door dit voor $n = 1, 2, 3$ te doen (niet zo moeilijk). Antwoord:

Noem $N = \sum_{j=1}^n X_j$. Dan is

$$E \left[\sum_{i=1}^N X_i \right] = E \left[E \left[\sum_{i=1}^N X_i \mid N \right] \right].$$

Verder is

$$E \left[\sum_{i=1}^N X_i \mid N = k \right] = E \left[\sum_{i=1}^k X_i \mid N = k \right] = \sum_{i=1}^k E[X_i \mid N = k] = \sum_{i=1}^k P(X_i = 1 \mid N = k) = k \cdot \frac{k}{n}.$$

Dit is intuïtief duidelijk, en uit te rekenen door te schrijven

$$\begin{aligned} P(X_i = 1 \mid N = k) &= \frac{P(X_i = 1, N = k)}{P(N = k)} \\ &= \frac{P(X_i = 1, \sum_{j=1, j \neq i}^n X_j = k - 1)}{P(\sum_{j=1}^n X_j = k)} \\ &= P(X_i = 1) \frac{P(\sum_{j=1, j \neq i}^n X_j = k - 1)}{P(\sum_{j=1}^n X_j = k)} \\ &= p \frac{\binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-k}}{\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}} = \frac{k}{n}. \end{aligned}$$

Invullen geeft

$$E \left[\sum_{i=1}^N X_i \right] = E \left[E \left[\sum_{i=1}^N X_i \mid N \right] \right] = E \left[\frac{N^2}{n} \right] = \frac{\text{Var}(N) + (E[N])^2}{n} = \frac{n(n-1)p^2 + np}{n} = (n-1)p^2 + p.$$