

Toets 2 van Inleiding Kansrekening wi1614

Rice Chapter 1, Chapter 2, Chapter 3

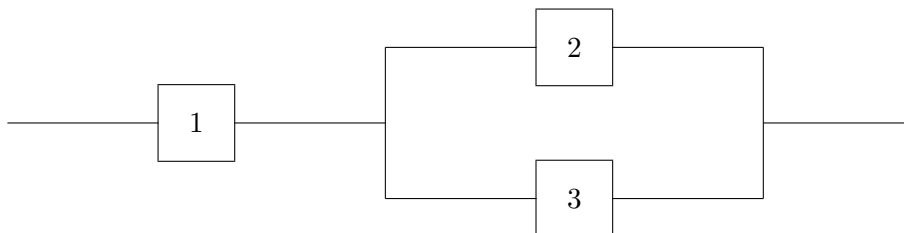
9 maart 2011, 14.45–15.30 uur

Bij deze toets is het gebruik van een (eventueel grafische) rekenmachine en van het formuleblad wi1614 toegestaan.

Er zijn 5 meerkeuzevragen, en één open vraag. Schrijf je 5 antwoorden MK op de eerste regel van je tentamen papier (Bijv. e) c) a) f) b).) Bij de open vraag is een antwoord alleen *niet* voldoende: er dient een berekening, toelichting en/of motivatie aanwezig te zijn. Dit alles goed leesbaar en in goed Nederlands (of goed Engels).

Normering: alle vragen tellen even zwaar.

1. Een systeem bestaat uit 3 componenten die als volgt geschakeld zijn:



Het systeem werkt als er stroom kan lopen van links naar rechts, waarbij een defecte component geen stroom doorlaat. Zij $A_i, i = 1, 2, 3$, de gebeurtenis dat component i functioneert. Dan is de gebeurtenis “het systeem werkt” gelijk aan:

- a) $A_1 \cap (A_2 \cup A_3)$ b) $A_1 \cap A_2 \cap A_3$
 c) $A_1 \cup (A_2 \cap A_3)$ d) $(A_1 \cap A_2^c \cap A_3) \cup (A_1 \cap A_2 \cap A_3^c)$
 e) $(A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_3)$ f) $A_1 \cup A_2 \cup A_3$
2. Een bepaalde aandelenkoers stijgt 1 punt met kans $\frac{1}{2}$, daalt 1 punt met kans $\frac{1}{3}$ en daalt 2 punten met kans $\frac{1}{6}$. Neem aan dat de koersfluctuaties onafhankelijk van elkaar plaatsvinden. De kans dat de koers na 3 op een volgende noteringen weer op zijn originele notering is teruggekeerd is gelijk aan
- a) $\frac{1}{24}$ b) $\frac{1}{8}$ c) 0 d) $\frac{1}{6}$ e) $\frac{1}{3}$ f) $\frac{1}{12}$
3. Stel dat X en Y discrete stochasten zijn. Van de simultane en marginale kansverdelingen is gegeven dat

		x			
		0	1	2	
y	-1				$1/2$
	1		$1/2$		$1/2$
		$1/6$	$2/3$	$1/6$	1

Dan is $P(X = 2, Y = -1)$ gelijk aan:

- a) $\frac{1}{24}$ b) 0 c) $\frac{1}{6}$
 d) $\frac{1}{3}$ e) $\frac{1}{2}$ f) niet te bepalen; te weinig gegevens

4. Gegeven: vijf onafhankelijke Bernoulli stochasten R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 met parameter $\frac{1}{2}$. Zij

$$Z = R_1 + 2R_2 + 4R_3 + 8R_4 + 16R_5.$$

Wat is $P(Z = 17)$?

- a) 0 b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{8}$ d) $\frac{1}{16}$ e) $\frac{1}{32}$ f) $\frac{1}{64}$

5. Laten X en Y continue stochastische variabelen zijn met gezamenlijke kansdichtheid

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{\pi}(\sin x + \cos y) \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2},$$

en $f_{X,Y}(x,y) = 0$ elders.

We transformeren (X,Y) naar het paar (U,V) met

$$U = \sin X, \quad V = \cos Y.$$

Wat is $P(U \leq \frac{1}{2})$?

N.B. Geen Jacobiaan nodig! Wel weten dat $\sin(\pi/6) = \frac{1}{2}$ en $\cos(\pi/6) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

- a) $2/3 - (1/4)\sqrt{3}$ b) $1/2$ c) $1/3 + (1/4)\sqrt{3}$
d) $1/6 + (1/2)\sqrt{3}$ e) $1/2 + (1/2)\sqrt{3}$ f) $1/4 + (1/2)\sqrt{3}$

Open Vraag

6. Het paar stochasten (X,Y) is uniform verdeeld over de driehoek Δ met hoekpunten $(0,0)$, $(0,1)$, en $(1,0)$ (m.a.w. de kansdichtheid van (X,Y) is constant op Δ , en 0 daarbuiten).

Wat is de voorwaardelijke kansdichtheid $f_{X|Y}(x|y)$?

Wat heeft $X|Y = y$ dus voor kansverdeling?

UITWERKINGEN en/of ANTWOORDEN

- 1** $A_1 \cap (A_2 \cup A_3)$, want component A_1 moet werken, en minstens één van A_2 of A_3 .
- 2** De volgorde maakt niet uit, en je kunt alleen weer terug komen met 2 maal +1 en 1 maal -2, dus $3 \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{6} = \frac{1}{8}$.
- 3** Omdat $P(X = 2, Y = 1) = 0$ moet zijn, moet $P(X = 2, Y = -1)$ gelijk zijn aan $\frac{1}{6}$.
- 4** $\frac{1}{32}$, want $\{Z = 17\} = \{R_1 = 1, R_2 = 0, R_3 = 0, R_4 = 0, R_5 = 1\}$.
- 5** $P(U \leq \frac{1}{2}) = P(\sin(X) \leq \frac{1}{2}) = P(X \leq \pi/6) = \int_0^{\pi/6} f_X(x) dx = 2/3 - (1/4)\sqrt{3}$, want

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dy = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\pi} (\sin x + \cos y) dy = \frac{1}{2} \sin(x) + \frac{1}{\pi}.$$

- 6** Per definitie is $f_{X|Y}(x|y) = f_{X,Y}(x,y)/f_Y(y)$, en $f_{X,Y}(x,y) = 2$ op Δ , en 0 daarbuiten. We hebben

$$f_Y(y) = \int_0^{1-y} 2 dx = 2(1-y)$$

als $0 \leq y < 1$ (en 0 elders).

Dus voor $0 \leq y < 1$ is $f_{X|Y}(x|y) = 2/2(1-y) = 1/1-y$ als $0 \leq x < 1-y$ (en 0 elders).

Conclusie: $X|Y = y$ is uniform over $[0, 1-y]$ verdeeld.