

Toets 5 over Markov ketens

Dinsdag 8 juni 2010, 10.45–12.45 uur

Toelichting: Normering: alle meerkeuze vragen, en alle onderdelen van de open vragen tellen voor twee punten, behalve 3.b dat voor 3 punten telt. Je krijgt 3 punten kado. Het cijfer is het totaal aantal punten (max. 30) gedeeld door 10.

1. Een IT-werknemer is verslaafd aan internet. Per 8-urige werkdag komen er gemiddeld 40 e-mail berichten binnen, en hij is zeer gefrustreerd als er een bericht binnen komt terwijl hij niet achter zijn computer zit. We modelleren het e-mail-gebeuren als een Poisson proces. Wat is de kans dat hij gefrustreerd raakt op een dag dat hij twee keer 5 minuten naar de w.c. gaat (aan het begin van de ochtend, en laat in de middag), en een half uur luncht?

a) 0.743 b) 0.818 c) 0.964 d) 0.791 e) 0.914 f) 0.853

2. Beschouw de Markov keten op $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ met overgangsmatrix

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Het aantal toestanden waarmee de toestand 1 communiceert is gelijk aan

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6 f) 7

3. Zij (Z_n) een vertakkingsproces met $Z_0 \equiv 1$, waarvan de kansgenererende functie $G(s) = E[s^{Z_1}]$ van de nakomelingenverdeling gelijk is aan

$$G(s) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}s + \frac{1}{3}s^2.$$

Wat is de kans $P(Z_1 \neq 0, Z_2 = 0)$ dat het proces precies op tijdstip 2 uitsterft?

a) $\frac{1}{27}$ b) $\frac{2}{27}$ c) $\frac{3}{27}$ d) $\frac{4}{27}$ e) $\frac{5}{27}$ f) $\frac{6}{27}$

4. Zij $(X_n)_{n=0}^\infty$ een Markov keten met $P(X_n = j) = \mu_j^{(n)}$ en $P(X_n = j | X_0 = i) = p_{ij}^{(n)}$, $n = 0, 1, \dots$. Dan is de voorwaardelijke kans $P(X_0 = i | X_n = j)$ dat gestart werd in toestand i gegeven dat $X_n = j$ gelijk aan:

a) $\mu_i^{(0)} p_{ij}^{(n)}$ b) $\frac{\mu_i^{(0)} p_{ij}^{(n)}}{\mu_j^{(n)}}$ c) $\mu_j^{(0)} p_{ji}^{(n)}$
d) $\frac{\mu_j^{(n)} p_{ji}^{(n)}}{\mu_j^{(0)}}$ e) $\frac{\mu_i^{(n)} p_{ji}^{(n)}}{\mu_j^{(0)}}$ f) $\frac{\mu_j^{(n)} p_{ij}^{(n)}}{\mu_j^{(0)}}$

5. Laat (X_n) de Markovketen op vijf toestanden $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ zijn met overgangsmatrix

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Dan zijn

- a) alle toestanden volhardend
b) $\{1\}$ voorbijgaand, en $\{2, 3, 4, 5\}$ volhardend
c) $\{1, 3\}$ voorbijgaand, en $\{2, 4, 5\}$ volhardend
d) $\{1, 2, 3\}$ voorbijgaand, en $\{4, 5\}$ volhardend
e) $\{1, 2\}$ voorbijgaand, en $\{3, 4, 5\}$ volhardend
f) alle toestanden voorbijgaand

(N.B. volhardend = recurrent (eng.) en voorbijgaand = transient (eng.))

6. Zij $(X(t))_{t \geq 0}$ een continue tijd Markovketen met drie toestanden 1, 2 en 3 en overgangssintensiteiten

$$q_{12} = q_{21} = q_{23} = q_{31} = \frac{1}{2}, \text{ en } q_{13} = q_{32} = 0.$$

De stationaire verdeling (π_1, π_2, π_3) van deze keten wordt gegeven door

- a) $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ b) $(\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5})$ c) $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ d) $(\frac{3}{7}, \frac{3}{7}, \frac{1}{7})$ e) $(\frac{4}{7}, \frac{2}{7}, \frac{1}{7})$ f) $(\frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{2}{8})$

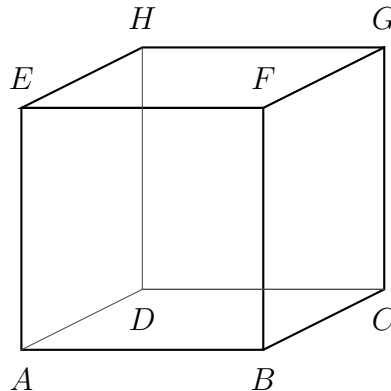
Open Vragen

Toelichting: Elk antwoord dient voorzien te zijn van een berekening, toelichting en/of argumentatie.

1. Laat (X_n) een Markovketen op vier toestanden $\{1, 2, 3, 4\}$ zijn met overgangsmatrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- a. Wat is de kans $p_{14}^{(5)}$ om in vijf stappen van toestand 1 naar toestand 4 te komen?
b. Wat is $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{11}^{(n)}$?
2. Zij $ABCD EFGH$ de eenheidskubus (zie tekening). Een vlo springt van hoekpunt naar hoekpunt, maar



alléén sprongen tussen hoekpunten die door een ribbe zijn verbonden, zijn mogelijk. Altijd is elk van de drie mogelijke sprongen even waarschijnlijk.

- a. Geef de toestandsruimte en overgangsmatrix van de Markov keten die de beweging van de vlo beschrijft.
b. Geef de stationaire verdeling van de Markov keten die de beweging van de vlo beschrijft.
c. Waar naar toe convergeert de gemiddelde (Euclidische) afstand tussen de positie van de vlo op tijdstip n en het hoekpunt A ? (Bijvoorbeeld: de afstand tussen A en G is $\sqrt{3}$).
3. We beschouwen een $M/M/1$ wachttijd systeem (aankomstintensiteit λ , bedieningsintensiteit μ) met de volgende wijziging: als een klant aankomt, en ziet dat er n klanten in de wachtrij staan, dan gaat hij het systeem binnen met kans $\frac{1}{n+1}$, of vertrekt met kans $1 - \frac{1}{n+1}$.
- a. Maak een schema met overgangssintensiteiten.
b. Bereken de stationaire verdeling van de lengte van de wachtrij. Hoe heet deze verdeling?

Antwoorden MK Vragen:

1 c Het aantal berichten in een tijdsinterval van lengte t uur is $Pois(5t)$ verdeeld. De kans op géén berichten in zo'n tijdsinterval is dus e^{-5t} . De kans op geen bericht in de genoemde 3 intervallen is dus $e^{-5/12} \cdot e^{-5/2} \cdot e^{-5/12} = e^{-40/12} = 0.035674$. De kans dat hij gefrustreerd raakt is dus 0.964326.

2 c Je kunt van 1 naar 1, 3, 5 en 6, en weer terug. Van 2, 4, en 7 kun je niet in 1 komen.

3 d $P(Z_1 \neq 0, Z_2 = 0) = P(Z_2 = 0, Z_1 = 1) + P(Z_2 = 0, Z_1 = 2)$
 $= P(Z_2 = 0 | Z_1 = 1)P(Z_1 = 1) + P(Z_2 = 0 | Z_1 = 2)P(Z_1 = 2) = \frac{1}{3} \frac{1}{3} + \frac{1}{9} \frac{1}{3} = \frac{4}{27}$.

4 b $P(X_0 = i | X_n = j) = P(X_0 = i, X_n = j) / P(X_n = j) = P(X_n = j | X_0 = i) P(X_0 = i) / P(X_n = j)$.

5 e Uit 1 en 2 kom je uiteindelijk in 3 terecht, en dan kun je niet meer terug. Maar 3 communiceert met 4 en 5.

6 c Uit $(u v w)Q = (0 0 0)$ volgt direct $u = 2v$ en $v = w$. Dus $(u v w) = (\frac{1}{2} \frac{1}{4} \frac{1}{4})$.

Antwoorden Open Vragen:

1a Er zijn twee manieren: 1,2,1,2,3,4 en 1,2,3,4,4,4. Deze hebben kansen 2/9 en 2/3 in totaal dus $p_{14}^{(5)} = \frac{8}{9}$

1b We hebben $p_{11}^{(n)} = 0$ als n oneven is, en $p_{11}^{(2n)} = (\frac{1}{3})^n$ als n even is. Dus $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{11}^{(n)} = 0$.

2a Toestandsruimte $S = \{A, B, C, D, E, F, G, H\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.
 De overgangsmatrix is

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

2b De snelste manier is op te merken dat P dubbel stochastisch is $\Rightarrow$ de stationaire verdeling is gelijkverdeling over de mogelijke toestanden, m.a.w. $\pi_i = 1/8$, $i \in S$. (Oók heel snel: bedenken dat uit de symmetrie zou moeten volgen dat je gelijkverdeling krijgt, dan zien dat die voldoet, en concluderen uit de uniciteit van π dat dat 'm dus is.) De langzame manier: $\pi = \pi P \Leftrightarrow \dots$

$$\begin{cases} \pi_1 = & \frac{1}{3}\pi_2 & & +\frac{1}{3}\pi_4 & +\frac{1}{3}\pi_5 \\ \pi_2 = & \frac{1}{3}\pi_1 & & +\frac{1}{3}\pi_3 & & +\frac{1}{3}\pi_6 \\ \pi_3 = & & \frac{1}{3}\pi_2 & & +\frac{1}{3}\pi_4 & & +\frac{1}{3}\pi_7 \\ \cdot & & & & & & \\ \cdot & & & & & & \\ \cdot & & & & & & \\ \pi_8 = & & & \frac{1}{3}\pi_4 & +\frac{1}{3}\pi_5 & & +\frac{1}{3}\pi_7 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \pi_1 = \dots = \pi_8$. Dit geeft $\pi_1 = \dots = \pi_8 = \frac{1}{8}$

2c Pas de Ergodenstelling toe met de functie f gegeven door $f(A) = 0, f(B) = f(D) = f(E) = 1, f(C) = f(F) = f(H) = \sqrt{2}$ en $f(G) = \sqrt{3}$. Dit geeft convergentie naar

$$\sum \pi_i f(i) = \frac{1}{8}(3 + 3\sqrt{2} + \sqrt{3}) \approx 1.1218.$$

3a Er staan (voor $n = 1, 2, \dots$) pijlen met intensiteiten $\frac{1}{n}\lambda$ van toestand $n-1$ naar n , en pijlen met intensiteiten μ van n naar $n-1$.

3b Balansvergelijkingen geven: $\pi_n = \frac{1}{n}\rho\pi_{n-1}$, met $\rho = \lambda/\mu$. Dit levert $\pi_n = \rho^n e^{-\rho}/n!$, en dit is een Poisson verdeling, met parameter ρ .