

Inleiding Kansrekening wi1614

Toets 3 over Chapter 1–4 uit Rice

Dinsdag 20 april, 10.45–12.45 uur

Toelichting: Normering: elke meerkeuze vraag telt voor 0.75 punt. De open vragen tellen elk voor 1 punt. Je krijgt 1 punt cadeau.

1. Laten A, B en C gebeurtenissen zijn met $P(A|C) = a$, $P(B|C) = b$, $P(C) = c$ en $P(A \cup B|C) = d$. Wat is $P(A \cap B|C)$?

a) $\frac{a+b}{d}$ b) $a+b-d$ c) $\frac{a+b}{c+d}$ d) $\frac{d}{a+b}$ e) $\frac{a+b}{c}$ f) $\frac{d}{c}$

2. De stochast U is exponentieel verdeeld met parameter 1. Dan is $E[e^{-U}]$ gelijk aan:

a) e b) e^{-1} c) 16 d) 32 e) $\frac{1}{3}$ f) $\frac{1}{2}$

3. De kans om met twee zuivere dobbelstenen een even totaal aantal ogen te gooien (m.a.w. de som van de ogen is een element van de verzameling $\{2, 4, 6, \dots, 12\}$), is gelijk aan

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{19}{36}$ c) $\frac{17}{36}$ d) $\frac{20}{36}$ e) $\frac{7}{12}$ f) $\frac{5}{12}$

4. X en Y hebben een gezamenlijke verdeling volgens de volgende tabel:

$p(a, b)$		b				$p_X(a)$
		0	1	2	3	
a	0	0.10	0.05	0.10	0.10	0.35
	1	0.05	0.05	0.05	0.10	0.25
	2	0.10	0.05	0.20	0.05	0.40
$p_Y(b)$		0.25	0.15	0.35	0.25	1

Dan is $E(X|Y=2)$ gelijk aan

a) 1.1145 b) 1.8253.. c) 1.2857.. d) 1.1573.. e) 0.05 f) 0.94332..

5. De gemeenschappelijke kansmassafunctie van de discrete stochastische variabelen X en Y is gegeven door

$$\begin{aligned} P(X=0, Y=0) &= \frac{4}{11}, & P(X=0, Y=1) &= 0, \\ P(X=1, Y=0) &= \frac{2}{11}, & P(X=1, Y=1) &= \frac{5}{11}. \end{aligned}$$

De variantie van Y is gelijk aan

a) $\frac{28}{121}$ b) $\frac{25}{121}$ c) $\frac{5}{11}$ d) $\frac{30}{121}$ e) $\frac{14}{121}$ f) $\frac{24}{121}$

6. Gegeven zijn de stochastische variabelen X en Y met waarden in $\mathbb{N}$. Laat g de gezamenlijke kansdichtheid van het paar (X, Y) zijn. Dan is $\sum_{y \in \mathbb{N}} g(x, y)$ gelijk aan
- a) $E[X]$ b) $P(X = x)$ c) $E(Y | X = x)$
d) $E[XY]$ e) $E[g(X, Y)]$ f) $E(g(X, Y) | X = x)$
7. Twee doosjes bevatten geldbedragen X resp. $2X$, waarbij X een stochastische variabele is met dichtheid $f(x) = 2x^{-3}1_{[1, \infty)}(x)$. U trekt aselekt een doosje, en neemt de inhoud ervan wanneer die groter is dan 2. Zo niet, dan neemt u de inhoud van het andere doosje. De verwachting van het geldbedrag dat men zich op deze manier toeigent is:
- a) $\frac{8}{3}$ b) $\frac{9}{2}$ c) $\frac{7}{2}$ d) $\frac{19}{8}$ e) $\frac{21}{8}$ f) $\frac{11}{3}$
- Hint:* Laat eerst zien dat $E(X | X > 2) = 4$ en $E(X | X \leq 2) = 4/3$.
8. Zij $\varphi(t) = E[e^{tX}]$ de momentgenererende functie van een stochast X . Dan heeft $Y = 3X$ momentgenererende functie
- a) $3\varphi(t)$ b) $\varphi(3t)$ c) $[\varphi(t)]^3$ d) $\varphi(t) + 3$ e) $3\varphi(3t)$ f) $[\varphi(t)]^{1/3}$

Open Vragen

Toelichting: Elk antwoord dient voorzien te zijn van een berekening, toelichting en/of argumentatie.

1. Jan en Natasha hebben een afspraak. Zij zullen elkaar tussen 11.00 en 12.00 uur achter het EWI-gebouw ontmoeten. Ongelukkigerwijs is de mobiele telefoon van Jan stuk, en kunnen zij niet langer dan 10 minuten wachten, en in ieder geval niet na 12 uur. De aankomsttijden van Jan en Natasha zijn onafhankelijke uniform verdeelde stochastische variabelen op $[11, 12]$.
- (i) Wat is de gemeenschappelijke kansdichtheid van de aankomsttijden?
(ii) Bereken de kans dat Jan en Natasha elkaar ontmoeten. (Maak een plaatje van deze gebeurtenis in het vierkant $[11, 12] \times [11, 12]$).
2. Voor een reeel getal x definiëren we $x^+ = \max(0, x)$, m.a.w. $x^+ = 0$ als $x < 0$, $x^+ = x$ als $x \geq 0$. Analooft is $x^- = \max(0, -x)$, m.a.w. $x^- = 0$ als $x > 0$, $x^- = -x$ als $x \leq 0$.
Merk op dat $x = x^+ - x^-$, en $|x| = x^+ + x^-$.
Laat X een stochast zijn met $E[X^2] < \infty$. Bewijs:
De stochasten $|X|$ en X zijn ongecorrleerd dan en slechts dan als $\text{Var}(X^+) = \text{Var}(X^-)$.
3. Laat N Poisson verdeeld zijn met parameter λ , en laten X_i onafhankelijke Bernoulli verdelingen zijn, allemaal met dezelfde parameter p met $0 < p < 1$. Bereken met behulp van momentgenererende functies de kansverdeling van

$$S = \sum_{i=1}^N X_i.$$

Antwoorden MK Vragen:

1 b: $P(A \cup B | C) = P(A | C) + P(B | C) - P(A \cap B | C).$

2 f: $E[e^{-U}] = \int_0^\infty e^{-u} e^{-u} du = 1/2.$

3 a: Precies de helft van een schaakbord.

4 c: $10/35 \cdot 0 + 5/35 \cdot 1 + 20/35 \cdot 2 = 9/7.$

5 d: $P(Y = 0) = \frac{6}{11}$ en $P(Y = 1) = \frac{5}{11}$, dus Y is Bernoulli met parameter $p = 5/11$. Dan is de variantie $p(1 - p) = 30/121$.

6 b: Dit is gewoon de berekening van de marginale verdeling van X .

7 c: Als W de winst is, dan is

$$\begin{aligned} E[W] &= \frac{1}{2}[E(X | X > 2)P(X > 2) + E(2X | X \leq 2)P(X \leq 2)] \\ &\quad + \frac{1}{2}[E(2X | 2X > 2)P(2X > 2) + E(X | 2X \leq 2)P(2X \leq 2)] \\ &= \frac{1}{2}\left[4\frac{1}{4} + \frac{8}{3}\frac{3}{4}\right] + \frac{1}{2}[4 + 0] = \frac{7}{2}. \end{aligned}$$

8 b: $E[e^{tY}] = E[e^{3tX}] = \varphi(3t).$

Antwoorden Open Vragen:

1 (i) De gemeenschappelijke kansdichtheid is de functie $f(x, y) = 1_{[11,12] \times [11,12]}(x, y)$.
(ii) Dit is 1 min de oppervlakte van 2 driehoeken (een door $(11\frac{1}{6}, 11)$, $(12, 11)$, en $(12, 11\frac{5}{6})$, en de andere gespiegeld om de diagonaal). De oppervlakte van deze twee driehoeken is $(5/6)^2 = 25/36$, dus de kans is $11/36$.

2 $\rho(X, Y) = 0$ d.e.s.d.a. $\text{Cov}(X, Y) = 0$, en verder

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X, |X|) &= \text{Cov}(X^+ - X^-, X^+ + X^-) \\ &= \text{Cov}(X^+, X^+) + \text{Cov}(X^+, X^-) - \text{Cov}(X^-, X^+) - \text{Cov}(X^-, X^-) \\ &= \text{Var}(X^+) - \text{Var}(X^-). \end{aligned}$$

3 De momentgenererende functie van N is $M_N(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}$, dus

$$\begin{aligned} M_S(t) &= M_N(\log(M_X(t))) = e^{\lambda(e^{\log(M_X(t))} - 1)} = e^{\lambda(e^{\log(1-p+pe^t)} - 1)} \\ &= e^{\lambda((1-p+pe^t) - 1)} = e^{\lambda(-p+pe^t)} = e^{\lambda p(e^t - 1)}, \end{aligned}$$

dus S heeft weer een Poisson verdeling, nu met parameter λp .