

Toets 2 Inleiding Kansrekening wi1614

Rice Chapter 1,2,3 en Chapter 4, Section 4.1.

15 maart 2010, 12.45–13.30 uur



Bij deze toets is het gebruik van een (eventueel grafische) rekenmachine en van het formuleblad wi1614 toegestaan.

Een antwoord alleen is *niet* voldoende: er dient een berekening, toelichting en/of motivatie aanwezig te zijn. Dit alles goed leesbaar en in goed Nederlands (of goed Engels).

Normering: alle vragen tellen even zwaar.

1. Laten A, B en C gebeurtenissen zijn met:

$A \cap B$ en C zijn onafhankelijk, $P(A|B) = \frac{1}{3}$, $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{6}$ en $P(C) = \frac{1}{4}$.

Wat is $P(A \cap B \cap C)$?

2. De stochastische variabele X heeft een exponentiële verdeling met parameter 1:

$$f_X(x) = e^{-x} 1_{(0,\infty)}(x).$$

Bereken de kansdichtheid $f_Y(y)$ van $Y = \ln(X)$.

3. Stel dat de stochasten X en Y de volgende simultane kansdichtheid hebben

$$f(x, y) = \frac{1}{2}(x + y)e^{-(x+y)} \quad x, y \geq 0,$$

en $f(x, y) = 0$ elders. Definieer Z als de som van X en Y .

Bereken de kansdichtheid $f_Z(z)$ van Z .

4. Laten X en Y een simultane kansmassafunctie hebben van de vorm

$$P(X = k, Y = \ell) = \frac{c2^{k+\ell}}{k!\ell!} \quad k = 0, 1, \dots, \ell = 0, 1, \dots$$

Wat is de waarde van de constante c ?

5. Laten U en V uniform over $[0,1]$ verdeeld zijn, en bovendien onafhankelijk.

Bereken $P(U - V > \frac{1}{2})$.

6. Gegeven 5 onafhankelijke Bernoulli verdelingen $R_1, \dots, R_5$ met parameter $\frac{1}{2}$. Zij

$$Z = R_1 + 2R_2 + 4R_3 + 8R_4 + 16R_5.$$

Wat is $E[Z]$?

UITWERKINGEN en/of ANTWOORDEN

1

$$P(A \cap B \cap C) = P(A \cap B)P(C) = P(A|B)P(B)P(C) = \frac{1}{72}.$$

2 We hebben

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(\ln(X) \leq y) = P(X \leq e^y) = 1 - e^{-e^y},$$

voor alle reële y . Dus $f_Y(y) = e^{-e^y} \cdot e^y$.

3

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, z-x) dx = \int_0^z \frac{1}{2} z e^{-z} dz = \frac{1}{2} z^2 e^{-z}.$$

4 Snelle manier: kennelijk hebben we te maken met twee onafhankelijke Poisson verdelingen met parameter 2. Dus $c = e^{-2} \cdot e^{-2} = e^{-4} \approx 0.0183$.

Langzame manier: de totale massa moet 1 zijn dus

$$1 = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} P(X=k, Y=\ell) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{c 2^{k+\ell}}{k! \ell!} = c \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{2^\ell}{\ell!} = c e^2 e^2.$$

Dan moet dus $c = e^{-4}$.

5 Het paar (U, V) heeft kansdichtheid $f_{U,V}(u, v) = 1$ op het vierkant $[0, 1] \times [0, 1]$. De lijn $u - v = \frac{1}{2}$ snijdt dit vierkant in $(1/2, 0)$ en $(1, 1/2)$. Deze kans is dus de oppervlakte van de driehoek door $(1/2, 0)$ en $(1, 1/2)$ en $(1, 0)$, en is dus gelijk aan

$$\frac{1}{8}.$$

6 $E[Z] = E[R_1] + 2E[R_2] + 4E[R_3] + 8E[R_4] + 16E[R_5] = 31/2 = 15\frac{1}{2}.$