

Toets 1 van Inleiding Kansrekening wi1614

Rice Chapter 1, Chapter 2, Section 2.1.

15 februari 2010, 12.45–13.30 uur

Bij deze toets is het gebruik van een (eventueel grafische) rekenmachine en van het formuleblad wi1614 toegestaan.

Een antwoord alleen is *niet* voldoende: er dient een berekening, toelichting en/of motivatie aanwezig te zijn. Dit alles goed leesbaar en in goed Nederlands (of goed Engels).

Normering: alle vragen tellen even zwaar.

1. Gegeven zijn twee onafhankelijke gebeurtenissen E en F met $P(E) = \frac{1}{3}$ en $P(F) = \frac{1}{5}$. Wat is $P(E \cup F)$?
2. Drie meisjes en drie jongens nemen deel aan een spelletje, waarin elke jongen voor één meisje moet kiezen. (Meer dan 15 jaar geleden was dit het basis idee voor het tv programma “Liefde op het eerste gezicht”.)
Neem aan dat elke jongen voor elk van de drie meisjes met kans $\frac{1}{3}$ zal kiezen (onafhankelijk van elkaar). Hoe groot is de kans dat er tenminste twee jongens voor hetzelfde meisje kiezen?
3. Van bedrijven met een vrouw aan de top gingen er 5% failliet in 2009, van bedrijven met een man aan de top 10%. Een vijfde van de bedrijven heeft een vrouw aan de top. Als bedrijf X failliet ging in 2009, wat is dan de kans dat er een vrouw aan de top van X stond?
4. Laten F_U en F_V de verdelingsfuncties van stochasten U en V zijn. Gegeven is dat $U \leq V$ (m.a.w. voor alle $\omega \in \Omega$ is $U(\omega) \leq V(\omega)$). Welke relatie bestaat er tussen $F_U(t)$ en $F_V(t)$, voor t reëel?
5. Zij X een stochast met een binomiale verdeling met parameters n and p . Bewijs dat $Y = n - X$ een binomiale verdeling met parameters n en $1 - p$ heeft.
6. Voor drie gebeurtenissen A, B en C geldt dat $P(A) = P(B) = P(C) = 1/3$,

$$P(A \cap B) = P(B \cap C) = P(A \cap C) = \frac{1}{6} \quad \text{en} \quad P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{12}.$$

Hieruit kun je afleiden (hoef je niet te laten zien) dat dan $P(A \cup B \cup C) = 7/12$.

Zij X de stochastische variabele

$$X = 1_A + 1_B + 1_C,$$

waar $1_A, 1_B$ en 1_C de indicator functies van de verzamelingen A, B en C zijn.

Geef de kansmassafunctie $p(a) = P(X = a)$ van X .

UITWERKINGEN en/of ANTWOORDEN

1 Onafhankelijkheid geeft: $P(E \cap F) = 1/15$. Maar dan is $P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F) = 1/3 + 1/5 - 1/15 = 7/15$.

2 Dit is 1 min de kans dat ze alle 3 een verschillend meisje kiezen, wat $3!/3^3$ is. Dus de gevraagde kans is $1 - 6/27 = 7/9$.

Andere aanpak voor de kans dat ze alle 3 een verschillend meisje kiezen: jongen 1 kiest een meisje, jongen 2 kiest met kans $2/3$ een ander meisje, en jongen 3 kiest met kans $1/3$ nog een ander meisje. Totaal: kans $1 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = 2/9$. Dus de gevraagde kans is $1 - 2/9 = 7/9$

3 Laten F , V en M de gebeurtenissen zijn corresponderend met “failliet”, “vrouw aan de top” en “man aan de top”. Dan is

$$P(V|F) = \frac{P(F|V)P(V)}{P(F|V)P(V) + P(F|M)P(M)} = \frac{1/20 \cdot 1/5}{1/20 \cdot 1/5 + 1/10 \cdot 4/5} = \frac{1}{1+8} = \frac{1}{9}.$$

4 Uit $U \leq V$ volgt dat $\{V \leq t\} \subset \{U \leq t\}$. Dus

$$F_V(t) = P(\{V \leq t\}) \leq P(\{U \leq t\}) = F_U(t),$$

voor alle t reëel.

5 Het handigste is om te gebruiken dat

$$X = R_1 + \dots + R_n,$$

waarbij de R_i onafhankelijke Bernoulli's zijn. Definieer $S_i = 1 - R_i$, dan is S_i Bernoulli met parameter $1 - p$, en

$$Y = S_1 + \dots + S_n,$$

dus Y heeft een $\text{Bin}(n, 1 - p)$ verdeling.

Je kunt ook rekenen:

$$P(Y = k) = P(n - X = k) = P(X = n - k) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{n-k} p^{n-k} (1-p)^k,$$

maar $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$, en we zien dat $Y \text{ Bin}(n, 1 - p)$ verdeeld is.

6 De stochast X kan de waarden 0, 1, 2 en 3 aannemen, voor andere waarden van a is $p(a) = 0$.

Onmiddellijk zien we dat

$p(0) = 1 - 7/12 = 5/12$ en $p(3) = 1/12$. Verder is $p(2) = 1/6 + 1/6 + 1/6 - 3 \cdot 1/12 = 3/12$, dus $p(1) = 1 - p(0) - p(2) - p(3) = 3/12$.