

Tentamen Analyse 3, WI 2601
Vrijdag 8 november 2013, 14.00-17.00

- Dit tentamen bestaat uit 5 opgaven.
 - Alle antwoorden dienen beargumenteerd te worden.
 - Normering: 40 punten zijn in totaal te behalen; de puntenverdeling is zoals aangegeven in de opgaven.
-

1. (4) Geef de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking voor $y = y(x)$ gegeven door

$$y'' + 5y' + 4y = e^{-x} + x^2. \quad (1)$$

2. Een tweede orde differentiaalvergelijking voor $y = y(x)$ wordt gegeven door

$$(1 - x)y'' + xy' - y = 0. \quad (2)$$

- a. (2) Bepaal de singuliere punt(en) van (2) als die er zijn. Zijn de punt(en) regulier singulier of irregulier singulier?
- b. (3) Leid een recurrente betrekking voor de coëfficiënten a_n af, als $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ een machtreeksoplossing is van (2) en toon aan dat convergentiestraal van de machtreeks tenminste 1 is.
- c. (2) Laat zien dat de algemene oplossing van (2) geschreven kan worden als $y(x) = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x)$, waarbij $y_1(x)$ een oplossing is van (2) met even en oneven machten van x en $y_2(x)$ een oplossing die alleen oneven machten van x bevat; bereken de eerste drie termen van $y_1(x)$ en $y_2(x)$.
- d. (2) Geef de oplossing van (2) met beginvoorwaarden $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. Is deze oplossing van het beginwaardeprobleem uniek? Zo ja, geef aan waarom; indien nee, geef een andere oplossing.

3. We bekijken de volgende matrixdifferentiaalvergelijkingen:

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}, \quad \text{en} \quad \dot{\mathbf{y}} = B\mathbf{y}, \quad (3)$$

met de matrices A en B gedefinieerd als

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & -3 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

- a. (5) Bereken e^{At} en e^{Bt} en geef de algemene oplossing van $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$.
- b. (2) Bereken $e^{(A+B)t}$.
- c. (2) Is $e^{At}e^{Bt} = e^{(A+B)t}$ in dit geval?
- d. (3) Geef een conditie wanneer $e^{At}e^{Bt} = e^{(A+B)t}$ voor willekeurige $n \times n$ matrices A en B en $t \in \mathbb{R}$ en bewijs je bewering.

4. Gegeven is het volgende stelsel differentiaalvergelijkingen voor $x(t), y(t)$:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ax - y - x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} &= x + ay - y(x^2 + y^2),\end{aligned}\tag{4}$$

met a een reële parameter.

- a. (2) Schrijf het stelsel (4) in poolcoördinaten, d.w.z. schrijf $x(t) = r(t) \cos \theta(t)$, $y(t) = r(t) \sin \theta(t)$ en laat zien dat de differentiaalvergelijkingen voor r en θ voldoen aan

$$\begin{aligned}\dot{r} &= r(a - r^2), \\ \dot{\theta} &= 1.\end{aligned}\tag{5}$$

- b. (1) Vind de/het evenwichtspunt(en) van (4) of (5).
- c. (3) Bepaal, voor zover mogelijk, de stabiliteit van de/het evenwichtspunt(en) en bepaal het type (zadel, focus, centrum, knoop) voor alle waarden van a door het systeem rond de/het punt(en) gevonden in (b) te lineariseren. Wat zegt de stabiliteit van deze punt(en) in het gelineariseerde systeem over de stabiliteit van deze punten in het niet-lineaire systeem (4)?
- d. (2) Voor welke waarden van a is er een gesloten baan? Is de periodieke oplossing corresponderend met deze baan stabiel? *Opmerking: Evenwichtspunten corresponderen per definitie met een periodieke oplossing en worden hier niet bedoeld.*
- e. (2) Schets het faseportret van het stelsel (4); onderscheid daarbij $a > 0$, $a = 0$, $a < 0$. *Hint: Hierbij kun je het best uitgaan van de representatie in poolcoördinaten zoals afgeleid bij onderdeel (a).*

5. Beschouw de volgende differentiaalvergelijking voor de functies $x = x(t)$ en $y = y(t)$ met $t \in J$ en J een interval in $\mathbb{R}$:

$$\frac{dx}{dt} = F(x, t), \quad x(0) = x_0; \quad \frac{dy}{dt} = G(y, t), \quad y(0) = x_0.\tag{6}$$

Neem aan dat $x(t)$ en $y(t)$ 2 oplossingen zijn van (6) en dat de functies F, G continu zijn op $D \times J$ met $D \subset \mathbb{R}$. Zij $F(x, t)$ Lipschitz continu, d.w.z. $|F(x_1, t) - F(x_2, t)| < K|x_1 - x_2|$ voor $K > 0$ en alle $x \in D$ en $t \in J$. Verder nemen we aan dat de functies F en G voor een zekere $\epsilon > 0$ voldoen aan:

$$|F(x, t) - G(x, t)| < \epsilon$$

- a. (3) Laat zien, door gebruik te maken van (6), dat voor $t \geq 0$ geldt

$$|x(t) - y(t)| \leq \int_0^t K|x(s) - y(s)| ds + \int_0^t \epsilon ds.$$

- b. (2) Definieer $u(t) = |x(t) - y(t)|$ en leid hieruit voor $t \geq 0$ de volgende ongelijkheid af

$$u(t) + \frac{\epsilon}{K} \leq \frac{\epsilon}{K} + K \int_0^t \left(u(s) + \frac{\epsilon}{K}\right) ds.$$

- c. (3) *Bonusopgave:* Laat zien dat uit b) volgt dat

$$|x(t) - y(t)| \leq \frac{\epsilon}{K} (e^{K|t|} - 1).$$