Opgave I

1) $y'' + y = \sin(x) + \cos^2(x)$

gebruik: $\cos^2(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)$

$y'' + y = \sin x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$

(4) i) homogene opl: $y'' + y = 0$

$y_{hom}(x) = A\sin x + B\cos x$.

ii) particuliere opl.: splitsen in 3 delen:

(3) $y_{p_1}'' + y_{p_1} = \sin x \rightarrow$ makkelijkst als $z_{p_1}'' + z_{p_1} = e^{ix}$ en dan $\mathrm{Im}(z_{p_1}) = y_{p_1}$

(3) $y_{p_2}'' + y_{p_2} = \frac{1}{2} \longrightarrow y_p = \frac{1}{2}$

$y_{p_3}'' + y_{p_3} = \frac{1}{2}\cos 2x \rightarrow y_p = C\cos(2x)$, dus $-C\,4\cos(2x) + C\cos(2x) = \frac{1}{2}\cos(2x)$

$C = -\frac{1}{6}$.

probeer $z_{p_1}(x) = \cancel{x}\, D x e^{ix}$

$z_{p_1}''(x) = (De^{ix} + iDxe^{ix})' = 2iD e^{ix} - Dxe^{ix}$.

dus $z_{p_1}'' + z_{p_1} = 2iDe^{ix} = e^{ix}$

dus $D = \frac{1}{2i}$

$y_{p_1}(x) = \mathrm{Im}[z_{p_1}(x)] = \mathrm{Im}\left[\frac{1}{2i}xe^{ix}\right] = -\frac{1}{2}x\cos x$.

Dus de algemene oplossing $y(x) = A\sin x + B\cos x + \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\cos(2x) - \frac{1}{2}x\cos x$.

Opgave II

2) $y'' - xy = 0 \qquad (2)$

machtreeks bepalen rond $x=1$, dus $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n$. invullen in (2)

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n(x-1)^{n-2} - \left[(x-1)+1\right]\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n$$

a) $$= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n(x-1)^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n.$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}(x-1)^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}(x-1)^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n.$$

4 $$= \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+2)(n+1)a_{n+2} - a_n - a_{n-1}\right](x-1)^n + 2a_2 - a_0 = 0$$

dit geeft: $a_2 = \frac{1}{2}a_0$

en $a_{n+2} = \dfrac{a_n + a_{n-1}}{(n+2)(n+1)}$ voor $n \geq 1$

3 — omdat deze machtreeks $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n$ een ~~regulier~~ ontwikkeling rond een regulier punt is en er geen i~~rregulier~~ singuliere punten zijn is de opl convergent voor alle $x \in \mathbb{R}$.

b) $y(1) = 1$ dus $a_0 = 1$ en $y'(1) = 0$, dan $a_1 = 0$; 4

$a_2 = \frac{1}{2}$ en $a_3 = \dfrac{a_1 + a_0}{3 \cdot 2} = \dfrac{1}{6}$ en $a_4 = \dfrac{a_2 + a_1}{4 \cdot 3} = \dfrac{\frac{1}{2}}{12} = \dfrac{1}{24}$ → 4 niet gevraagd

dus $y(x) = 1 + \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{6}(x-1)^3 + \frac{1}{24}(x-1)^4 + \mathcal{O}((x-1)^5)$

3. $\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \underset{-2}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

opgave 3

$\underline{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))^T$

$\dot{\underline{x}} = A\underline{x}$: De algemene opl. $\underline{x}(t) = \cancel{\underline{x}(t_0)}\, e^{A(t-t_0)} \underline{x}(t_0)$ of wel $\underline{x}(t) = e^{At}\underline{c}$

Je bent klaar als je e^{At} hebt uitgerekend.

diagonaliseren :

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)((1-\lambda)^2+1) = 0$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1+i \\ \lambda_2 = 1-i \\ \lambda_3 = -2. \end{cases}$$

dus matrix is complex diagonaliseerbaar.

$A = SDS^{*T}$ uitrekenen van S; dus eigenvectoren bepalen :

$\lambda_1 = 1+i$: $\begin{pmatrix} -i & -1 & 0 \\ 1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 1-i \end{pmatrix} \to \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}$ en dus bij $\lambda_2 = 1-i$ $\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}$

en $\underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ bij $\lambda_3 = 2$

$S = \begin{pmatrix} i/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ en $(S^*)^T = \begin{pmatrix} \frac{-i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

$$e^{At} = e^{SD(S^*)^T t} = S e^{Dt} (S^*)^T.$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt2} & \frac{-i}{\sqrt2} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{(1+i)t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{(1-i)t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{i}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2} & 0 \\ \frac{i}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt2} & \frac{-i}{\sqrt2} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{ie^{(1+i)t}}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2} e^{(1+i)t} & 0 \\ \frac{i}{\sqrt2} e^{(1-i)t} & \frac{1}{\sqrt2} e^{(1-i)t} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt2} e^{-2t} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac12 e^{(1+i)t} + \frac12 e^{(1-i)t} & \frac{i}{2} e^{(1+i)t} - \frac{i}{2} e^{(1-i)t} & 0 \\ -\frac{i}{2} e^{(1+i)t} + \frac{i}{2} e^{(1-i)t} & + \frac12 e^{(1+i)t} + \frac12 e^{(1-i)t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos t\, e^t & -\sin t\, e^t & 0 \\ \sin t\, e^t & \cos t\, e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{pmatrix}$$

deze matrix bestaat $\forall t \in \mathbb{R}$. Enige oplossing $e^{At}\underline{c}$ is uniek en bestaat ook $\forall t \in \mathbb{R}$.

opgave 4

4. $\dot{x} = (x^2-1)y$

$\dot{y} = (x+2)(y-1)(y+2)$

a) evenwichtspunten: $(1,1)$ $(1,-2)$, $(-1,1)$, $(-1,-2)$ $\rightarrow$ $x^2-1=0$ en $(y-1)(y+2)=0$.

$(-2,0)$ $\rightarrow$ $y=0$ en $x+2=0$.

b) lineaire stabiliteit:

uitrekenen van Jacobi matrix: $\begin{pmatrix} 2xy & x^2-1 \\ (y-1)(y+2) & (x+2)((y+2)+(y-1)) \end{pmatrix}$

invullen punten:

$(1,1)$: $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = 2;\ \lambda_2 = 6$ instabiele knoop. lin + nonlin

$(1,-2)$: $\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -9 \end{pmatrix}$ $\lambda_1 = -4;\ \lambda_2 = -9$ stabiele knoop lin + nonlin

$(-1,1)$: $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ $\lambda_1 = -2; \lambda_3 = 6$ zadel punt (instabiel) lin + nonlin

$(-1,-2)$: $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ $\lambda_1 = 4;\ \lambda_2 = -3$ " " lin + nonlin.

$(-2,0)$ $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$; $\lambda^2 + 6 = 0 \rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{6} \rightarrow$ centrum, in lineair systeem.

in niet lineaire systeem focus of centrum

5a) Er zijn heel veel ^(als het) invariante verzamelingen 4

kijk bijvoorbeeld naar $\dot{x} = 0$: ~~dus $\dot{y}=0$~~ als $x=1$, dan is er alleen beweging in ~~x-as~~ y-as-richting: $\dot{y} = 3(y-1)(y+2)$ dus het lijnstuk

$$L_1^+ = \{(x,y) \mid x=1 \text{ en } -2 \leq y \leq 1\}$$ is een invariante verzameling.

en ook $L_2^+ = \{(x,y) \mid x=1 \text{ en } y<-2\}$.

$L_3^+ : \{(x,y) \mid x=1 \text{ en } y>1\}$.

b) Hetzelfde geldt natuurlijk als $x=-1 \Rightarrow$ dus $L_1^- = \{(x,y) \mid x=-1 \text{ en } -2<y<1\}$

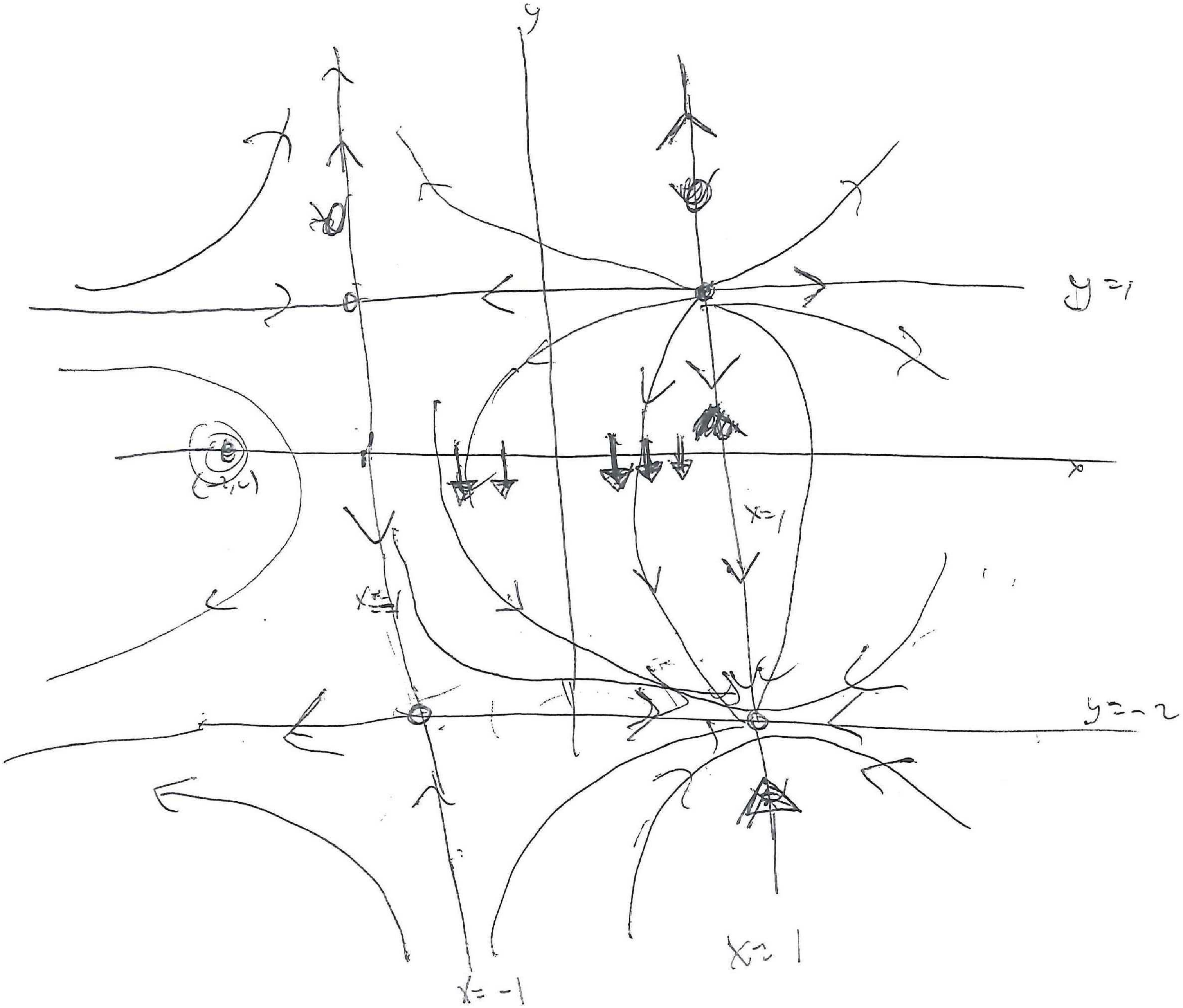
Er zijn ook invariante verzamelingen als $y=1$ of $y=-2$, je loopt dan alleen in de richting x

dus $L_4 = \{(x,y) \mid y=1 \quad -1<x<1\}$ is invariante verz.

$L_5 : \{(x,y) \mid y=-2 \quad -1<x<1\}$ " " "

omdat L_4, L_5, L_1^+, L_1^- een rechthoek definieren is de verzameling die wordt begrensd door L_4, L_5, L_1^+, L_1^- ook een invariante verzameling die binnen ~~is~~ twee dimensionaal is.

e) fase portret:



opgave 5

5. $\dot{\underline{x}} = A(t)\,\underline{x}$

[redacted]

a) $\frac{d}{dt}\left[x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \ldots\right] = x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 + x_3\dot{x}_3 + \dot{x}_1 x_1 + \dot{x}_2 x_2 + \dot{x}_3 x_3$

$= \underline{x}\cdot\dot{\underline{x}} + \dot{\underline{x}}\cdot\underline{x} = \underline{x}\cdot A\underline{x} + A\underline{x}\cdot\underline{x}$

$= x^T A\underline{x} + (Ax)^T\underline{x} = x^T A x + x^T A^T \underline{x}$

b) $A^T + A$ is symmetrisch, dus $A + A^T$ is orth diagonaliseerbaar.

$(A^T + A) = S D S^T$ met $SS^T = S^T S = \mathbb{I}$.

Dus $\underline{x}^T[A^T + A]\underline{x} = \cancel{\ldots}$ kies $\cancel{x \ldots}$ ~~y = Sx of wel x = S^T y~~ $x = Sy$

$(Sy)^T [A^T + A] Sy = y^T \underbrace{S^T[A^T + A]S}\, y$

$= y^T D y = y_1^2\lambda_1^{(t)} + \ldots + \lambda_n^{(t)} y_n^2$

$\leq y_1^2 M(t) + \ldots M(t)\, y_n^2$

$= [y_1^2 + \ldots y_n^2]\, M(t) = |x(t)|^2 M(t)$

want $S^T S = \mathbb{I}$ dus $|x|^2 = |y|^2$

c) $M(t) \geq 0$ ipv $\phi(t) \geq 0$

d) $\frac{d}{dt}|x(t)|^2 \leq M(t)\,|x(t)|^2 \Rightarrow \frac{d}{dt}|x|^2 - M(t)|x|^2 \leq 0$

$\frac{d}{dt}\left[|x|^2 e^{-\int_{t_0}^{t} M(s)\,ds}\right] \leq 0 \quad |x|^2 e^{-\int_{t_0}^{t} M(s)\,ds} \leq |x_0|^2$

e) Als $\int_{t_0}^{\infty} M(s)\,ds = -\infty \rightarrow |x|^2 \rightarrow 0$ als $t \rightarrow \infty$