

Tentamen Analyse 3, WI 2601
Vrijdag 1 februari 2013, 14.00-17.00

- Dit tentamen bestaat uit 5 opgaven.
 - Alle antwoorden dienen beargumenteerd te worden.
 - Normering: 100 punten zijn in totaal te behalen; de puntenverdeling is zoals aangegeven in de opgaven.
 - *Succes !*
-

1. (10) Geef de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking voor $y = y(x)$ gegeven door

$$y''' + 2y'' + y' = e^x. \quad (1)$$

2. De Gegenbauer differentiaalvergelijking, die toepassingen heeft in de potentiaaltheorie, wordt gegeven door

$$(1 - x^2)y'' - (2\alpha + 1)xy' + \lambda(\lambda + 2\alpha)y = 0, \quad (2)$$

waarin $y = y(x)$ en waarin α en λ parameters zijn.

- a. (3) Geef de singuliere punt(en) van de Gegenbauer differentiaalvergelijking (2) als die er zijn. Zijn de punt(en) regulier singulier of irregulier singulier?
- b. (5) Leid een recurrente betrekking voor de coëfficiënten a_n af, als $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ een machtreeksoplossing is van (2) en bepaal de convergentiestraal van de machtreeks.
- c. (5) Laat zien dat de algemene oplossing van (2) geschreven kan worden als $y(x) = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x)$, waarbij $y_1(x)$ een even oplossing en $y_2(x)$ een oneven oplossing is van (2); bereken de eerste twee termen van $y_1(x)$ en $y_2(x)$.
- d. (2) Wat gebeurt er met de oplossingen als $\lambda \in \mathbb{N}$?
- e. (5) Geef de oplossing van (2) met beginvoorwaarden $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ in het geval $\lambda = 3$.

3. (25) We bekijken het volgende 3-dimensionale stelsel differentiaalvergelijkingen voor $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= 3x_1 - x_2 - x_3, \\ \dot{x}_2 &= x_1 + x_2 + 3x_3, \\ \dot{x}_3 &= -2x_3, \end{cases} \quad (3)$$

Bereken e^{At} , waarbij A de coëfficiëntenmatrix is behorend bij (3). Geef de algemene oplossing en het maximale gebied waarop deze oplossing bestaat.

4. Gegeven is de volgende differentiaalvergelijking voor $q = q(t)$:

$$\frac{d^2}{dt^2}q = -V'(q), \quad V(q) = \frac{q^4}{4} - \frac{q^3}{3}. \quad (4)$$

waarbij het accent ' op V de afgeleide naar q nemen betekent.

- (3) Schrijf (4) als een stelsel eerste orde differentiaalvergelijkingen.
- (5) Vind de evenwichtspunten van dit stelsel.
- (5) Bepaal de stabiliteit van de evenwichtspunten en classificeer ze.
- (5) Laat zien dat er oneindig veel periodieke oplossingen zijn.
- (5) Is er een q_0 waarvoor de oplossing van (4) met beginwaarde $(q(0), \frac{dq}{dt}(0)) = (q_0, 0)$ niet-periodiek is?
Opmerking: Evenwichtspunten corresponderen per definitie met een periodieke oplossing en worden hier dus niet bedoeld.
- (5) Schets het faseportret van het stelsel gevonden bij (a).

5. Beschouw nu het volgende probleem voor $x = x(t)$ met $t \in \mathbb{R}$:

$$\frac{dx}{dt} = e^{-|x|}, \quad x(0) = 0. \quad (5)$$

- (4) Vind een oplossing van het beginwaardeprobleem (5).
- (6) Formuleer de existentie- en eenduidigheidsstelling en geef aan of het beginwaardeprobleem (5) aan de voorwaarden van deze stelling voldoet.
- (7) Bestaat er een *unieke* oplossing van (5) en *bestaat deze oplossing voor alle* $t \in \mathbb{R}$? Bereken waarom dat wel of niet het geval is en geef aan of dit in overeenstemming is met de existentie- en eenduidigheidsstelling.