

Tentamen Analyse 3, WI 2601
Dinsdag 17 april 2012, 9.00-12.00

- Dit tentamen bestaat uit 6 opgaven.
 - Alle antwoorden dienen beargumenteerd te worden.
 - Normering: 100 punten zijn in totaal te behalen; de verdeling is als aangegeven in de opgaven.
 - *Succes !*
-

1. (10) Bereken de algemene oplossing van de volgende differentiaalvergelijking

$$(t - y)e^t y \frac{dy}{dt} = t^2 e^y - tye^y. \quad (1)$$

Deze vergelijking kan worden geschreven in standaardgedaante als:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{e^y t(t - y)}{e^t(t - y)y},$$

mits $y \neq t$ en $y \neq 0$. Na uitdelen van de $(t - y)$ term is de vergelijking separabel en kunnen we deze herschrijven tot

$$\frac{dy}{dt} = \frac{e^y t}{ye^t}.$$

De oplossing hiervan is

$$\int e^{-y} y \, dy = \int e^{-t} t \, dt + C,$$

met C een constante. Oftewel

$$e^{-y}(y + 1) - e^{-t}(t + 1) = -C.$$

Deze vergelijking geeft impliciet de oplossing van (1). Merk op dat $y(t) = t$ ook een oplossing is van de differentiaalvergelijking (1). Deze wordt ook verkregen uit bovenstaande vergelijking door $C = 0$ te nemen.

2.(15) Een C^2 functie $y = y(t)$ voldoet aan het beginwaardeprobleem:

$$y'' + 2y' - 3y = e^t \sin t + e^{-t} \quad y(0) = 0, y'(0) = 0. \quad (2)$$

Vind de oplossing $y = y(t)$ van het beginwaardeprobleem (2).

Begin eerst met het vinden van de homogene oplossing. Daartoe zul je eerst de karakteristieke vergelijking

$$r^2 + 2r = 3 = 0,$$

moeten oplossen. Deze heeft als oplossingen $r_1 = -3$, $r_2 = 1$, dus de homogene oplossing is van de vorm:

$$y_{hom}(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 e^t.$$

Het makkelijkst is het om de particuliere oplossingen te bepalen met een probeeroplossing. Omdat de homogene oplossing niet terugkeert in de inhomogene term kunnen we gewoon proberen, $y_p^1(t) = A e^{-t}$, met $A \in \mathbb{R}$ voor de e^{-t} -term. De $e^t \sin t$ term schrijven we eerst in complexe vorm $e^{(1+i)t}$. De probeeroplossing voor deze inhomogene term is dus van de vorm $y_p^2(t) = e^{(1+i)t} B$, met $B \in \mathbb{C}$. We nemen daarna het imaginaire deel van deze oplossing. Invullen van $y_p^1(t)$ geeft direct dat $A = -1/4$ en $B = \frac{1}{4i-1} = -\frac{4}{17}i - \frac{1}{17}$ en daarmee volgt dat $Im(y_p^2) = -\frac{e^t}{17}(4 \cos t + \sin t)$. De algemene oplossing wordt dus gegeven door

$$y(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 e^t - \frac{e^{-t}}{4} - \frac{e^t}{17}(4 \cos t + \sin t).$$

Invullen van de beginvoorwaarden geeft 2 vergelijkingen

$$c_1 + c_2 = \frac{33}{68} \tag{3}$$

$$-3c_1 + c_2 = \frac{3}{68}, \tag{4}$$

met als oplossing $c_1 = \frac{15}{136}$, $c_2 = \frac{3}{8}$. Deze waarden invullen voor c_1 en c_2 geeft de gezochte oplossing van het beginwaardeprobleem.

3. Beschouw de differentiaalvergelijking voor $\mathbf{y} = \mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^d$ gegeven door

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}),$$

met $f : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ een continue functie en beginvoorwaarde $\mathbf{y}(0) = \mathbf{0}$ voor alle $t > 0$.

- a. (5) Wat zijn de voorwaarden uit de stelling van Picard-Lindelöf waaronder het beginwaarde probleem een unieke oplossing heeft?

De functie f is continu (zoals gegeven) en de afgeleide $\frac{\partial f}{\partial y}$ moet continu zijn op een bepaald gebied rond $y(0) = 0$. Dit is de stelling zoals hij in het boek staat. Je mag ook zeggen dat Lipschitz continuïteit in y voldoende is.

- b. (5) Laat zien dat voor alle continue functies φ, β op $[a, b]$ met $\beta(t) > 0$ op $[a, b]$, de ongelijkheid

$$\varphi(t) \leq C + \int_a^t \beta(s) \varphi(s) ds,$$

met C een willkekeurige constante impliceert dat $\varphi(t) \leq C e^{\int_a^t \beta(s) ds}$.

Begin met het vermenigvuldigen van de ongelijkheid met $\beta(t)$. Dan krijg je

$$\beta \varphi(t) \leq \beta C + \beta \int_a^t \beta(s) \varphi(s) ds.$$

Definieer vervolgens $U(t) = \int_a^t \beta(s) \varphi(s) ds$. Daaruit volgt meteen dat $\dot{U} \leq \beta C + \beta U$. De volgende stap is alle termen naar 1 kant brengen en vermenigvuldigen met $e^{-\int_a^t \beta(s) ds}$. Dan kun je schrijven dat

$$\frac{d}{dt} \left[(C + U) e^{-\int_a^t \beta(s) ds} \right] \leq 0.$$

Dit zegt dat de functie $(C + U) e^{-\int_a^t \beta(s) ds}$ altijd dalend is, dus

$$C + U \leq [C + U(0)] e^{\int_a^t \beta(s) ds} = C e^{\int_a^t \beta(s) ds},$$

want $U(a) = 0$. Door nu alleen nog te gebruiken dat $\varphi \leq C + U$, wat gegeven was, heb je direct het gevraagde bewezen.

- c. (5) Gebruik (b) om aan te tonen dat eenduidigheid van het beginwaardeprobleem al volgt als in de existentie- en eenduidigheidsstelling een van de voorwaarden wordt vervangen door

$$\sqrt{t} |\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) - \mathbf{f}(t, \mathbf{y})| \leq |\mathbf{x} - \mathbf{y}|,$$

voor alle $t > 0$ en $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$.

Je begint met het omschrijven van het beginwaardeprobleem naar een integraalvergelijking, net zoals in het bewijs van de existentie- en eenduidigheidsstelling.

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \int_0^t f(s, \varphi(s)) ds.$$

Neem nu aan dat φ_1 en φ_2 2 oplossingen zijn van dit beginwaardeprobleem. De bedoeling is dan te laten zien dat het verschil van φ_1 en φ_2 naar nul gaat.

$$\begin{aligned} |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)| &= \left| \int_0^t [f(s, \varphi_1(s)) - f(s, \varphi_2(s))] ds \right| \leq \int_0^t |f(s, \varphi_1(s)) - f(s, \varphi_2(s))| ds \\ &\leq \int_0^t \frac{|\varphi_1(s) - \varphi_2(s)|}{\sqrt{s}} ds \leq 0. \end{aligned} \quad (5)$$

De laatste stap is gemaakt door het toepassen van (b) met $C = 0$. Verder bestaat de integraal op de tweede regel, omdat de functies $\varphi_1(t)$ en $\varphi_2(t)$ netjes continu zijn en de singulariteit in 0, slechts als $1/\sqrt{s}$ gaat. Hiermee is het gevraagde bewezen.

4. (20) We bekijken het volgende 3-dimensionale stelsel differentiaalvergelijkingen voor $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= -4x_1 + 2x_2 + 2x_3, \\ \dot{x}_2 &= 2x_1 + 5x_2 - x_3, \\ \dot{x}_3 &= 2x_1 - x_2 + 5x_3. \end{cases} \quad (6)$$

Geef de algemene oplossing van het stelsel (6) en bereken e^{At} , met A de coëfficiëntenmatrix behorend bij het bovenstaande stelsel.

De matrix A wordt gegeven door

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Deze matrix is symmetrisch en dus diagonaliseerbaar. Het uitrekenen van de eigenwaarden gebeurt als volgt:

$$\begin{vmatrix} -4-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 5-\lambda & -1 \\ 2 & -1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4-\lambda & 2 & 2 \\ 0 & 6-\lambda & \lambda-6 \\ 2 & -1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-6) \begin{vmatrix} -4-\lambda & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 5-\lambda \end{vmatrix} \\ = (\lambda-6) \begin{vmatrix} -4-\lambda & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-6) \begin{vmatrix} -4-\lambda & 4 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-6)(\lambda^2-24) = 0. \quad (7)$$

Dus $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = 2\sqrt{6}$, $\lambda_3 = -2\sqrt{6}$. Vervolgens de eigenvectoren bepalen bij deze eigenwaarden. Bij λ_1 hoort eigenvector $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Bij λ_2 hoort eigenvector $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{6}-2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Bij λ_3 hoort eigenvector $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -\sqrt{6}-2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. De algemene oplossing is

$$\mathbf{y}(t) = c_1 \mathbf{v}_1 e^{6t} + c_2 \mathbf{v}_2 e^{2\sqrt{6}t} + c_3 \mathbf{v}_3 e^{-2\sqrt{6}t}.$$

Om e^{At} uit te rekenen is het het gemakkelijkst om met deze vervelende getallen de formule te gebruiken

$$e^{At} = \Phi(t)\Phi^{-1}(0).$$

Voor $\Phi(t)$ nemen we dan de matrix die bestaat uit de *genormeerde* vectoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$, zodat je alleen hoeft te transponeren om de inverse uit te rekenen. Je kunt nu makkelijk aflezen dat

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} 0 & (\sqrt{6}-2)e^{2\sqrt{6}t}/N & -(\sqrt{6}+2)e^{-2\sqrt{6}t}/M \\ e^{6t}/\sqrt{2} & e^{2\sqrt{6}t}/N & e^{2-\sqrt{6}t}/M \\ -e^{6t}/\sqrt{2} & e^{2\sqrt{6}t}/N & e^{-2\sqrt{6}t}/M \end{pmatrix},$$

met $N = \sqrt{(\sqrt{6}-2)^2 + 2}$ en $M = \sqrt{(\sqrt{6}+2)^2 + 2}$

$$\Phi^{-1}(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ (\sqrt{6}-2)/N & 1/N & 1/N \\ -(\sqrt{6}+2)/M & 1/M & 1/M \end{pmatrix}$$

Deze matrices vermenigvuldigen levert op e^{At} met kolommen $[k_1, k_2, k_3]$

$$k_1 = \begin{bmatrix} (\sqrt{6}-2)^2 e^{2\sqrt{6}t}/N^2 + (2+\sqrt{6})^2 e^{-2\sqrt{6}t}/M^2 \\ (\sqrt{6}-2)e^{2\sqrt{6}t}/N^2 - (2+\sqrt{6})^2 e^{-2\sqrt{6}t}/M^2 \\ (\sqrt{6}-2)e^{2\sqrt{6}t}/N^2 - (2+\sqrt{6})e^{-2\sqrt{6}t}/M^2 \end{bmatrix},$$

$$k_2 = \begin{bmatrix} (\sqrt{6}-2)e^{2\sqrt{6}t}/N^2 - (2+\sqrt{6})e^{-2\sqrt{6}t}/M^2 \\ e^{6t}/2 + e^{2\sqrt{6}t}/N^2 + e^{-2\sqrt{6}t}/M^2 \\ -e^{6t}/2 + e^{2\sqrt{6}t}/N^2 + e^{-2\sqrt{6}t}/M^2 \end{bmatrix}$$

$$k_3 = \begin{bmatrix} (\sqrt{6} - 2)e^{2\sqrt{6}t}/N^2 - (2 + \sqrt{6})e^{-2\sqrt{6}t}/M^2 \\ -e^{6t}/2 + e^{2\sqrt{6}t}/N^2 + e^{-2\sqrt{6}t}/M^2 \\ e^{6t}/2 + e^{2\sqrt{6}t}/N^2 + e^{-2\sqrt{6}t}/M^2 \end{bmatrix}$$

Omdat de getallen niet erg gelukkig gekozen zijn, worden rekenfouten in het laatste deel niet aangerekend.

5. Gegeven is het volgende niet-lineaire stelsel:

$$\begin{cases} \dot{x} = x(1 - x^2 - y^2) - y(1 + \alpha + x), \\ \dot{y} = x(1 + \alpha + x) + y(1 - x^2 - y^2). \end{cases} \quad (8)$$

met $\alpha \in \mathbb{R}$ een parameter.

a. (5) Schrijf stelsel (8) in poolcoordinaten.

Schrijf $x = r \cos \theta$ en $y = r \sin \theta$, waarbij nu r en θ functies van t zijn. Dit invullen in de DV geeft

$$\begin{cases} \dot{r} \cos \theta - r \sin \theta \dot{\theta} = r \cos \theta (1 - r^2) - r \sin \theta (1 + \alpha + r \cos \theta) \\ \dot{r} \sin \theta + r \cos \theta \dot{\theta} = r \cos \theta (1 + \alpha + r \cos \theta) + r \sin \theta (1 - r^2). \end{cases} \quad (9)$$

Na optellen en aftrekken van de vergelijkingen (na eerst vermenigvuldigd te hebben met $\cos \theta$ en $\sin \theta$ verkrijgt je de vergelijkingen voor r en θ

$$\begin{cases} \dot{r} = r(1 - r^2), \\ \dot{\theta} = 1 + \alpha + r \cos \theta. \end{cases} \quad (10)$$

Deze vergelijkingen zijn ontkoppeld.

b. (5) Bepaal alle evenwichtspunten en limitcycles van dit stelsel. *Hint: Het is handig hierbij de representatie gevonden in (a) te gebruiken.*

Uit (a) volgt meteen dat $r = 0$ een evenwichtspunt is. De stabiliteit is ook meteen duidelijk, want voor r dicht in de buurt van 0 wordt het gedrag bepaald door de lineaire term en dus is de oorsprong een instabiel punt dat in het algemeen spiraliseert, behalve in het geval $\alpha = -1$. Ook volgt meteen uit de vergelijking voor $\dot{r}$ dat $\{r = 1\}$ een limitcycle is. Omdat $\dot{r} < 0$ als $r > 1$ en $\dot{r} > 0$ voor $r < 1$, is de limitcycle stabiel. Het enig dat we nog moeten controleren is of er misschien evenwichtspunten op de limitcycle liggen. Dit is het geval als $1 + \alpha + \cos \theta = 0$. Dus als $\alpha > 0$, dan is er geen evenwichtspunt op de limitcycle. Als $\alpha = 0$ dan is $(1, \pi)$ een evenwichtspunt dat niet stabiel is. Voor $\alpha \in (-2, 0)$ zijn er steeds twee evenwichtspunten waarvan er een stabiel is en de andere instabiel. Bij $\alpha = -2$ is er nog een evenwichtspunt over namelijk $(1, 0)$. Zie ook de figuur.

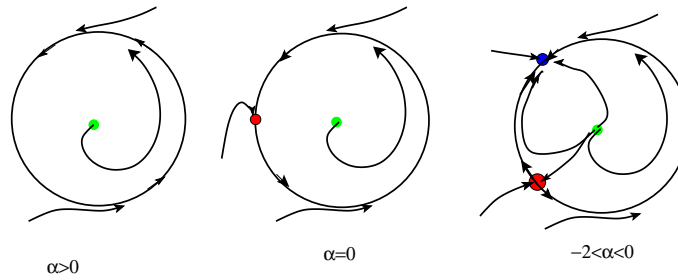


Figure 1: Een schets van het faseportret voor verschillende waarden van α .

- c. (10) Bepaal de stabiliteit van de evenwichtspunten en de eventueel gevonden limitcycles. Onderscheid daarbij de gevallen $\alpha = 0$, $\alpha > 0$ en $\alpha = 0$. Teken het faseportret voor alle drie de gevallen.

Dit is gewoon in b) te vinden en af te lezen uit de figuur.

6. We beschouwen nu de tweede-orde differentiaalvergelijking:

$$\ddot{z} + 2\dot{z} - ze^{z^2} = 0. \quad (11)$$

- a. (5) Schrijf (11) als een stelsel en bereken de evenwichtspunten.

het stelsel is makkelijk op te schrijven als $z = x$ en $\dot{z} = y$

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -2x + xe^{x^2} \end{cases} \quad (12)$$

De evenwichtspunten zijn $(0, 0)$, $(\sqrt{\ln 2}, 0)$, $(-\sqrt{\ln 2}, 0)$. Uit de lineaire analyse blijkt dat $(0, 0)$ een centrum is en de twee andere punten zijn zadelpunten.

- b. (5) Laat zien dat (11) oneindig veel periodieke oplossingen bevat.

Hiervoor moeten we laten zien dat er oneindig veel banen gesloten zijn. De vergelijking voor de banen is

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x + xe^{x^2}}{y}.$$

Deze vergelijking kunnen we weer oplossen, omdat hij separabel is. Hieruit kun je vinden dat

$$y^2 + 2x^2 - (e^{x^2} - 1) = K,$$

met daarin K een constante. Als $K < 0$ Dan snijden de banen in ieder geval niet de y -as. Voor een gesloten baan moet gelden dat de functie de x -as en de y -as snijdt. Wegens symmetrie onder $x \rightarrow -x$ en $y \rightarrow -y$ is de baan dan gesloten. Door te redeneren dat voor voldoende kleine $|x|$, de $\exp(x^2)$ kan worden benaderd door zijn Taylor reeks vind je al snel dat in de buurt van de oorsprong de banen gesloten zijn.

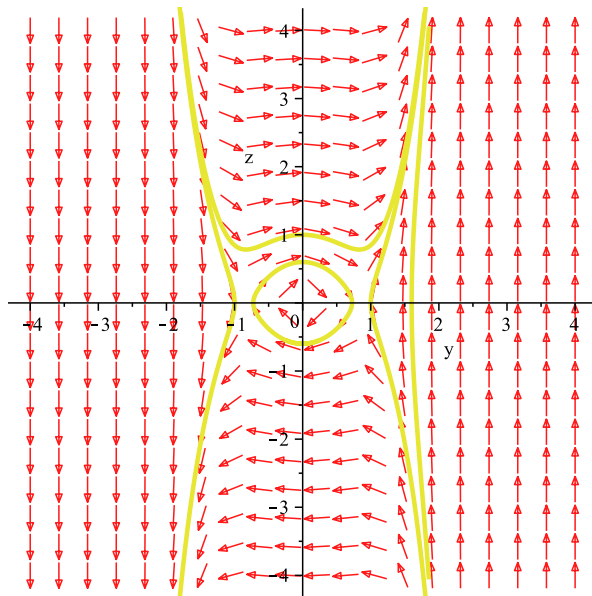


Figure 2: Een plotje van het faseportret met Maple

Je kunt ook redeneren dat om snijpunten met de y -as te hebben zal $K > 0$ zijn. Wanneer hebben we voor deze waarde van K ook nog twee snijpunten met de x -as? Daarvoor moet je de functie $2x^2 - (e^{x^2} - 1)$ bekijken. Deze heeft maxima bij $x = \pm \ln 2$ met grootte $2 \ln 2 - 1$ en een minimum bij $x = 0$ met waarde 0. Dus zolang $0 < K < 2 \ln 2 - 1$, heeft de oplossing zowel snijpunten met x -as als met de y -as. (Opmerking: Er zijn zelfs 4 snijpunten met de x -as, maar slechts twee snijpunten corresponderen met de gezochte periodieke banen). We hebben dan periodieke banen. Andere waarden van K corresponderen met banen die niet periodiek zijn.

- c. (5) Zijn alle oplossingen periodiek? Zo nee, geef een (impliciete) uitdrukking voor een niet-periodieke baan. Zo ja, maak dit met argumenten aannemelijk.

Nee, zie boven

- d. (5) Teken het faseportret behorend bij (11).