

Tentamen Analyse 3, WI 2601
Dinsdag 17 april 2012, 9.00-12.00

- Dit tentamen bestaat uit 6 opgaven.
 - Alle antwoorden dienen beargumenteerd te worden.
 - Normering: 100 punten zijn in totaal te behalen; de verdeling is als aangegeven in de opgaven.
 - *Succes !*
-

1. (10) Bereken de algemene oplossing van de volgende differentiaalvergelijking

$$(t - y)e^t y \frac{dy}{dt} = t^2 e^y - tye^y. \quad (1)$$

2.(15) Een C^2 functie $y = y(t)$ voldoet aan het beginwaardeprobleem:

$$y'' + 2y' - 3y = e^t \sin t + e^{-t} \quad y(0) = 0, y'(0) = 0. \quad (2)$$

Vind de oplossing $y = y(t)$ van het beginwaardeprobleem (2).

3. Beschouw de differentiaalvergelijking voor $\mathbf{y} = \mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^d$ gegeven door

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}),$$

waarbij $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ continu is voor alle $t > 0$ en de beginvoorwaarde is $\mathbf{y}(0) = \mathbf{0}$.

- a. (5) Wat zijn de voorwaarden uit de existentie- en eenduidigheidsstelling van Picard-Lindelöf waaronder het beginwaarde probleem een unieke oplossing heeft?
- b. (5) Laat zien dat voor alle continue functies φ, β op $[a, b]$ met $\beta(t) > 0$ op $[a, b]$, de ongelijkheid

$$\varphi(t) \leq C + \int_a^t \beta(s) \varphi(s) ds,$$

met C een willkekeurige constante impliceert dat $\varphi(t) \leq C e^{\int_a^t \beta(s) ds}$ voor alle $t \in [a, b]$.

- c. (5) Gebruik (b) om aan te tonen dat eenduidigheid van het beginwaardeprobleem al volgt als in de existentie- en eenduidigheidsstelling een van de voorwaarden wordt vervangen door

$$\sqrt{t} |\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) - \mathbf{f}(t, \mathbf{y})| \leq |\mathbf{x} - \mathbf{y}|,$$

voor alle $t > 0$ en $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$.

4. (20) We bekijken het volgende 3-dimensionale stelsel differentiaalvergelijkingen voor $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= -4x_1 + 2x_2 + 2x_3, \\ \dot{x}_2 &= 2x_1 + 5x_2 - x_3, \\ \dot{x}_3 &= 2x_1 - x_2 + 5x_3. \end{cases} \quad (3)$$

Geef de algemene oplossing van het stelsel (3) en bereken e^{At} , met A de coëfficiëntenmatrix behorend bij het bovenstaande stelsel.

5. Gegeven is het volgende niet-lineaire stelsel:

$$\begin{cases} \dot{x} = x(1 - x^2 - y^2) - y(1 + \alpha + x), \\ \dot{y} = x(1 + \alpha + x) + y(1 - x^2 - y^2). \end{cases} \quad (4)$$

met $\alpha \in \mathbb{R}$ een parameter.

- a. (5) Schrijf stelsel (4) in poolcoördinaten.
- b. (5) Bepaal alle evenwichtspunten en limitcycles van dit stelsel. *Hint: Het is handig hierbij de representatie gevonden in (a) te gebruiken.*
- c. (10) Bepaal de stabiliteit van de evenwichtspunten en de eventueel gevonden limitcycles. Onderscheid daarbij de gevallen $\alpha = 0$, $\alpha > 0$ en $\alpha < 0$. Teken het faseportret voor alle drie de gevallen.

6. We beschouwen nu de tweede-orde differentiaalvergelijking:

$$\ddot{z} + 2z - ze^{z^2} = 0. \quad (5)$$

- a. (5) Schrijf (5) als een stelsel en bereken de evenwichtspunten.
- b. (5) Laat zien dat (5) oneindig veel periodieke oplossingen bevat.
- c. (5) Zijn alle oplossingen periodiek? Zo nee, geef een (impliciete) uitdrukking voor een niet-periodieke baan. Zo ja, maak dit met argumenten aannemelijk.
- d. (5) Teken het faseportret behorend bij (5).