

Tentamen Analyse 3, WI 2601
Vrijdag 3 februari 2012, 9.00-12.00

- Dit tentamen bestaat uit 6 opgaven.
 - Alle antwoorden dienen beargumenteerd te worden.
 - Normering: 100 punten zijn in totaal te behalen; de verdeling is als aangegeven in de opgaven.
 - *Succes !*
-

1 a. (5) Is de differentiaalvergelijking voor $y = y(t)$ en gegeven door

$$(3y^2 + 5t^2y) + (3ty + 2t^3)y' = 0 \quad (1)$$

exact ? Waarom wel/niet ?

b.(10) Vind een impliciete uitdrukking voor de oplossingskrommen van (1). *Hint: Gebruik indien nodig een integrerende factor ϕ van de vorm $\phi(t, y) = t^\alpha y^\beta$.*

De differentiaalvergelijking is niet exact, want

$$\frac{\partial}{\partial y} [3y^2 + 5t^2y] = 6y + 5t^2 \neq \frac{\partial}{\partial t} [3ty + 2t^3] = 3y + 6t^2$$

Probeer daarom een integrerende factor te vinden $\phi(t, y) = t^\alpha y^\beta$ door op te lossen

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} [3y^{2+\beta}t^\alpha + 5t^{2+\alpha}y^{\beta+1}] &= 3(2+\beta)t^\alpha y^{1+\beta} + (\beta+1)y^\beta t^{\alpha+2} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} [3t^{\alpha+1}y^{\beta+1} + 2(\alpha+3)t^{2+\alpha}y^\beta] \end{aligned}$$

Hieruit volgt

$$\begin{aligned} 2(\alpha+3) &= (\beta+1)5 \\ 5\beta - 2\alpha &= 1 \end{aligned}$$

Oplossen van dit stelsel geeft $\alpha = 2$ en $\beta = 1$ en dus $\phi(t, y) = t^2y$.

Om de constante van beweging E te vinden dient opgelost te worden

$$\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial y} &= t^2 y(3ty + 2t^3) = 3t^3 y^2 + 2t^5 y \\ \frac{\partial E}{\partial t} &= t^2 y(3y^2 + 5t^2 y) = 3t^2 y^3 + 5t^4 y^2.\end{aligned}$$

Hieruit volgt door integratie direct dat

$$E(t, y) = t^3 y^3 + t^5 y^2 = \text{const}$$

2.(10) Een C^2 functie $y = y(t)$ voldoet aan het beginwaardeprobleem:

$$y'' + 2y' - 3y = 100(t - 2)H_2(t); \quad y(0) = 0, y'(0) = 0. \quad (2)$$

met H_2 de Heaviside functie die gedefinieerd is als $H_2(t) = \begin{cases} 1 & \text{als } t \geq 2, \\ 0 & \text{als } t < 2 \end{cases}$

Vind de oplossing $y = y(t)$ van het beginwaardeprobleem (2).

Deze vraag kan op verschillende manieren worden opgelost. Bijvoorbeeld met de Laplace transformatie. Noteer $\hat{Y}(s) = \int_0^\infty e^{-st} y(t) dt$ Dit geeft

$$(s^2 + 2s - 3)\hat{Y}(s) = 100 \frac{e^{-2s}}{s^2},$$

Dus

$$\hat{Y}(s) = \frac{e^{-2s}}{s^2(s+3)(s-1)} = \frac{25}{9} e^{-2s} \left[\frac{9}{s-1} - \frac{1}{s+3} - \frac{8}{s} - \frac{12}{s^2} \right],$$

waarbij met breuksplitsen de coëfficiënten van de verschillende termen zijn bepaald. Terugtransformeren (bijvoorbeeld door tabel te gebruiken) geeft

$$y(t) = -\frac{25}{9} H_2(t) [-16 + 12t + e^{-3(t-2)} - 9e^{t-2}]$$

3. Beschouw de volgende differentiaalvergelijking voor $y = y(t)$

$$y' = |y|^\alpha,$$

met beginvoorwaarde $y(0) = 0$ op de verzameling $t \geq 0$ en met $\alpha \in (0, \infty)$.

- (5) Geef een oplossing van het bovenstaande beginwaardeprobleem.
- (5) Onderzoek voor welke waarden van α het bovenstaande beginwaardeprobleem een unieke oplossing heeft.
- (5) Is dit in overeenstemming met de existentie- en eenduidigheidsstelling en verklaar dit.

- a. De triviale oplossing $y \equiv 0$ is natuurlijk een oplossing, wat meteen volgt door invullen in de vergelijking
- b. Het probleem heeft geen unieke oplossing als $\alpha \in (0, 1)$. Voor $\alpha \geq 1$ is de oplossing wel uniek, maar bestaat hij op een beperkt domein.

Beschouw allereerst de DV met beginvoorwaarde $y(t_0) = y_0$. Voor het gemak nemen we aan dat $y_0 > 0$. Dan is er een omgeving rond t_0 waarvoor $y(t) > 0$. We kunnen de vergelijking integreren, want hij is separabel. Dit geeft

$$\frac{y^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} = t + C$$

, met C een integratie constante. Invullen van de beginvoorwaarde geeft

$$C = \frac{y_0^{1-\alpha}}{1-\alpha} - t_0,$$

mits $\alpha \neq 1$. De oplossing

$$y_1(t) = [(1-\alpha)(t-t_0) + y_0^{1-\alpha}]$$

kan echter 0 worden voor $\alpha \in (0, 1)$ als

$$t = t^* = t_0 - \frac{y_0^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

Dat betekent dat de oplossing niet uniek is want er zijn nu twee oplossingskrommen die elkaar snijden. Je zou nu dus een oplossing kunnen construeren die eruitziet als

$$y(t) = \begin{cases} 0, & \text{als } t < t^* \\ y_1(t-t^*), & \text{als } t \geq t^* \end{cases} \quad (3)$$

Het geval $y_0 < 0$ gaat net zo. Nu alleen nog het geval $\alpha = 1$. In dit geval leidt oplossen van de separabele differentiaal vergelijking tot de oplossing $y(t) = y_0 e^{t-t_0}$ als $y_0 > 0$ en $y(t) = y_0 e^{-(t-t_0)}$ als $y_0 < 0$. Deze oplossing zal de triviale oplossing nooit snijden, dus ook in dit geval is er een unieke oplossing.

- c. Dit klopt heel erg mooi met de existentie en eenduidigheidsstelling die zegt dat er een unieke oplossing is als

$$f(y)$$

Lipschitz continu is, wat zeker zo is als $\frac{\partial f}{\partial y}$ bestaat en begrensd is. Om te zien dat dit precies samenvalt met $\alpha \geq 1$ bekijken we

$$k(\alpha) := |y_1|^\alpha - |y_2|^\alpha.$$

Als $\alpha = 1$ dan staat er wegens de driehoeksongelijkheid $||y_1|^\alpha - |y_2|^\alpha| \leq |y_1 - y_2|$, dus Lipschitz continu of wel $\frac{\partial f}{\partial y}$ is begrensd, dus is een unieke oplossing voor $\alpha = 1$. Als $\alpha > 1$, dan nemen we aan dat $|y_1| > |y_2|$, met $y_2 = 1-h$ het andere geval gaat net zo. Als $y_1 \neq 0$ dan hebben y_1 en $y_1 - h$ hetzelfde teken voor h voldoende klein. Dus dan bestaat $\frac{\partial f}{\partial y}$ en is de functie Lipschitz continu en daarom is er existentie en eenduidigheid voor

het beginwaarde probleem met $y(t_0) = y_0$ en $y_0 \neq 0$. Echter als $y_0 = 0$, dan gaat dit niet meer op. Wel geldt

$$||y_1|^\alpha - 0^\alpha| \leq |y_1 - 0|,$$

als $\alpha > 1$ en $|y_1| < 1$. Dus is de functie $|y|^\alpha$ Lipschitz continu voor $\alpha \geq 1$ en daarom geldt existentie en eenduidigheid. Als $\alpha < 1$ dan is er geen Lipschitz continuïteit meer en verlies je eenduidigheid.

4. (20) We bekijken het volgende 4-dimensionale stelsel differentiaalvergelijkingen voor $x_1(t), \dots, x_4(t)$:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= 4x_1 - x_2 + 4x_3 - 8x_4, \\ \dot{x}_2 &= 4x_2 + x_3 - 2x_3, \\ \dot{x}_3 &= 4x_3 - x_4, \\ \dot{x}_4 &= 4x_4. \end{cases} \quad (4)$$

Geef de algemene oplossing van het stelsel (4). Bestaat deze voor alle $t \in \mathbb{R}$?

De matrix e^{At} is het gemakkelijkst te vinden door A te schrijven als een diagonale matrix $\oplus N$, met N een nilpotente matrix. Dit geeft

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 4 & -8 \\ 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 4I + N = 4I + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

met I de eenheidsmatrix. Omdat $4IN = N4I$ kunnen we makkelijk de e -macht van de matrix A berekenen. Uit bovenstaande vinden we

$$e^{At} = e^{4t} \left[I + Nt + \frac{N^2 t^2}{2} + \frac{N^3 t^3}{3!} \right] = e^{4t} \begin{pmatrix} 1 & -t & 4t + \frac{t^2}{2} & -8t - 2t^2 - \frac{t^3}{6} \\ 0 & 1 & -t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De algemene oplossing is nu $\mathbf{x}(t) = e^{At} \mathbf{x}_0$. Deze oplossing bestaat natuurlijk voor alle $t \in \mathbb{R}$, omdat e^{At} gedefinieerd is voor alle $t \in \mathbb{R}$; dit is ook een bekende stelling uit de theorie voor lineaire stelsels differentiaalvergelijkingen.

5. Gegeven is het volgende niet-lineaire stelsel:

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - y + x^2, \\ \dot{y} = -2x + xy. \end{cases} \quad (6)$$

a. (3) Vind alle evenwichtspunten van (6).

- b.(8) Lineariseer (6) rond de onder (a) gevonden evenwichtspunten en bepaal de stabiliteit (stabiel/instabiel/asymptotisch stabiel) van elk van de evenwichtspunten in het gelineariseerde stelsel en schets het faseportret van het gelineariseerde stelsel in elk evenwichtspunt.
- c. (4) Wat kun je concluderen over de stabiliteit van de evenwichtspunten van het oorspronkelijke niet-lineaire stelsel (6) ?

5 a. De evenwichtspunten vind je door

$$x(-2 + y) = 0 \quad (7)$$

$$-x - y + x^2 = 0, \quad (8)$$

op te lossen. Hieruit vind je de punten $(0, 0)$, $(-1, 2)$, $(2, 2)$

5b Lineariseren rond elke van de punten. Reken eerst de Jacobi matrix uit

$$J = \begin{pmatrix} -1 + 2x & -1 \\ -2 + y & x \end{pmatrix}$$

Invullen van $(0, 0)$ levert op

$$J_{(0,0)} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix},$$

met eigenwaarden $\lambda = -2$ en $\lambda = 1$ met bijbehorende eigenruimtes

$$E_{-2} = \text{Span} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, E_1 = \text{Span} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

Dus dit is een zadelpunt. Invullen van $(-1, 2)$ levert op

$$J_{(-1,2)} = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

met eigenwaarden $\lambda = -3$ en $\lambda = -1$ met bijbehorende eigenruimtes

$$E_{-3} = \text{Span} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, E_{-1} = \text{Span} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

Dus dit is een stabiele knoop (attractor).

Invullen van $(2, 2)$ levert op

$$J_{(2,2)} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

met eigenwaarden $\lambda = 3$ en $\lambda = 2$ met bijbehorende eigenruimtes

$$E_3 = \text{Span} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, E_2 = \text{Span} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Dus dit is een instabiele knoop (repellor).

5c Omdat geen van de eigenwaarden een reeel deel 0 heeft, is het gedrag van het gelineariseerde systeem lokaal hetzelfde als dat van het niet-lineaire systeem voor elk van de drie punten.

6. We beschouwen nu het stelsel:

$$\begin{cases} \dot{x} = -1 - y + x^2, \\ \dot{y} = x + xy. \end{cases} \quad (9)$$

Een deelverzameling $M \subseteq \mathbb{R}^2$ heet *invariant* als $(x_0, y_0) \in M$ impliceert dat $((x(t), y(t))) \in M$ voor alle t waarvoor de oplossing van (9) bestaat.

- a. (5) Laat zien dat de lijn $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = -1\}$ invariant is onder (9).
- b. (5) Laat zien dat ook de cirkel $C_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$ invariant is onder (9). *Hint: onderzoek het gedrag van $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ langs de banen van het stelsel als functie van t .*
- c. (8) Vind het/de evenwichtspunt(en) van (9). Gebruik dit en de invariante lijn uit (6a) om aan te tonen dat het systeem (9) geen periodieke banen heeft. *Hint: Je mag gebruiken dat elke periodieke baan een evenwichtspunt omsluit.*
- d. (7) Schets zo volledig mogelijk het faseportret van het niet-lineaire systeem (9).
 - 6a. Vul in $y = 1$ in (9). Dan geeft de eerste vergelijking $\dot{x} = x^2$ en de tweede vergelijking $\dot{y} = 0$. Dit betekent dat wanneer je op de lijn $y = 1$ bent je daar altijd op blijft en in de richting van positieve x loopt.
 - 6b. Je wilt aantonen dat wanneer je begint op C_0 je daar ook voor alle t op blijft. Dit is het makkelijkst aan te tonen door de tijdsafgeleide van $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ te bekijken voor punten die aan de DV (9) voldoen.

$$\frac{df}{dt} = 2x\dot{x} + 2y\dot{y} = 2x(-1 + x^2 + y^2),$$

dus als $-1 + x^2(0) + y^2(0) = 0$ dan is $x^2(t) + y^2(t) - 1 = 0$ voor alle t , dus C_0 is invariant.

- 6c. Als er een periodieke baan bestaat dan moet deze een equilibrium omsluiten. Er is maar 1 evenwichtspunt en dat $(0, -1)$. Dit punt ligt op de lijn L . Als er gesloten banen bestaan dan zal de lijn L twee keer moeten worden gersneden. Dit is onmogelijk, wegens de invariantie van L .
- 6d. Het faseportret zal er ongeveer als volgt uitzien. Je hebt de invariante lijn. De invariante cirkel en het punt $(0, -1)$. Verder is er de symmetrie $(x(t), y(t)) \rightarrow (-x(-t), y(-t))$, dus het faseplaatje is symmetrisch bij spiegeling in de y -as als de tijd wordt omgedraaid; de x -component van het vectorveld verandert niet van teken, maar de y -component van het vectorveld keert wel van teken om; zie onderstaand faseplaatje. Opmerking: Er Zijn oneindig veel invariante ellipsen die door $(0, -1)$ gaan. Probeer ditzelf eens aan te tonen.

