

Tentamen Analyse 3, WI 2601
Vrijdag 3 februari 2012, 9.00-12.00

- Dit tentamen bestaat uit 6 opgaven.
 - Alle antwoorden dienen beargumenteerd te worden.
 - Normering: 100 punten zijn in totaal te behalen; de verdeling is als aangegeven in de opgaven.
 - *Succes !*
-

1 a. (5) Is de differentiaalvergelijking voor $y = y(t)$ en gegeven door

$$(3y^2 + 5t^2y) + (3ty + 2t^3)y' = 0 \quad (1)$$

exact ? Waarom wel/niet ?

b.(10) Vind een impliciete uitdrukking voor de oplossingskrommen van (1). *Hint: Gebruik indien nodig een integrerende factor ϕ van de vorm $\phi(t, y) = t^\alpha y^\beta$.*

2.(10) Een C^2 functie $y = y(t)$ voldoet aan het beginwaardeprobleem:

$$y'' + 2y' - 3y = 100(t - 2)H_2(t); \quad y(0) = 0, y'(0) = 0. \quad (2)$$

met H_2 de Heaviside functie die gedefinieerd is als $H_2(t) = \begin{cases} 1 & \text{als } t \geq 2, \\ 0 & \text{als } t < 2 \end{cases}$

Vind de oplossing $y = y(t)$ van het beginwaardeprobleem (2).

3. Beschouw de volgende differentiaalvergelijking voor $y = y(t)$

$$y' = |y|^\alpha,$$

met beginvoorwaarde $y(0) = 0$ op de verzameling $t \geq 0$ en met $\alpha \in (0, \infty)$.

- a. (5) Geef een oplossing van het bovenstaande beginwaardeprobleem.
- b. (5) Onderzoek voor welke waarden van α het bovenstaande beginwaardeprobleem een unieke oplossing heeft.
- c. (5) Is dit in overeenstemming met de existentie- en eenduidigheidsstelling en verklaar dit.

4. (20) We bekijken het volgende 4-dimensionale stelsel differentiaalvergelijkingen voor $x_1(t), \dots, x_4(t)$:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= 4x_1 - x_2 + 4x_3 - 8x_4, \\ \dot{x}_2 &= 4x_2 + x_3 - 2x_4, \\ \dot{x}_3 &= 4x_3 - x_4, \\ \dot{x}_4 &= 4x_4. \end{cases} \quad (3)$$

Geef de algemene oplossing van het stelsel (3). Bestaat deze voor alle $t \in \mathbb{R}$?

5. Gegeven is het volgende niet-lineaire stelsel:

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - y + x^2, \\ \dot{y} = -2x + xy. \end{cases} \quad (4)$$

- a. (3) Vind alle evenwichtspunten van (4).
- b. (8) Lineariseer (4) rond de onder (a) gevonden evenwichtspunten en bepaal de stabiliteit (stabiel/instabiel/asymptotisch stabiel) van elk van de evenwichtspunten in het gelineariseerde stelsel en schets het faseportret van het gelineariseerde stelsel in elk evenwichtspunt.
- c. (4) Wat kun je concluderen over de stabiliteit van de evenwichtspunten van het oorspronkelijke niet-lineaire stelsel (4) ?

6. We beschouwen nu het stelsel:

$$\begin{cases} \dot{x} = -1 - y + x^2, \\ \dot{y} = x + xy. \end{cases} \quad (5)$$

Een deelverzameling $M \subseteq \mathbb{R}^2$ heet *invariant* als $(x_0, y_0) \in M$ impliceert dat $((x(t), y(t)) \in M$ voor alle t waarvoor de oplossing van (5) bestaat.

- a. (5) Laat zien dat de lijn $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = -1\}$ invariant is onder (5).
- b. (5) Laat zien dat ook de cirkel $C_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$ invariant is onder (5). *Hint: onderzoek het gedrag van $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ langs de banen van het stelsel als functie van t .*
- c. (8) Vind het/de evenwichtspunt(en) van (5). Gebruik dit en de invariante lijn uit (6a) om aan te tonen dat het systeem (5) geen periodieke banen heeft. *Hint: Je mag gebruiken dat elke periodieke baan een evenwichtspunt omsluit.*
- d. (7) Schets zo volledig mogelijk het faseportret van het niet-lineaire systeem (5).