

Tentamen Analyse 3, WI 2601
Maandag 10 januari 2011, 9.00-12.00

- Dit tentamen bestaat uit 5 opgaven.
 - Alle antwoorden dienen beargumenteerd te worden.
 - Normering: 100 punten zijn in totaal te behalen; de verdeling is als aangegeven in de opgaven.
 - *Succes !*
-

1 a.(10) Bepaal de algemene oplossing van de derde orde differentiaalvergelijking

$$y''' - 2y'' + y' - 2y = e^t. \quad (1)$$

De algemene oplossing $y(t)$ wordt gegeven door $y(t) = y_{hom}(t) + y_{part}(t)$, waarbij $y_{hom}(t)$ een oplossing is van de homogene vergelijking en $y_{part}(t)$ een particuliere oplossing is. De oplossingen van homogene vergelijking worden gegeven door invullen van $y_{hom}(t) = e^{rt}$. Hieruit vinden we de karakteristieke vergelijking

$$r^3 - 2r^2 + r - 2 = (r - 2)(r^2 + 1) = 0,$$

met oplossing $r = 2, r = i, r = -i$. De homogene (reële) oplossing wordt verkregen door reële en imaginaire delen van bovenstaande oplossingen te nemen. Dit geeft

$$y_{hom}(t) = c_1 e^{2t} + c_2 \cos(t) + c_3 \sin(t).$$

Een particuliere oplossing vind je het makkelijkst door $y_{part}(t) = Ae^t$ te substitueren in de differentiaalvergelijking. Hieruit volgt dan direct dat $A = -1/2$. Dus $y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 \cos(t) + c_3 \sin(t) - \frac{1}{2}e^t$ met c_1, c_2 en c_3 willekeurige constanten in $\mathbf{R}$ is de gezochte algemene oplossing. De complexe vorm van de algemene oplossing is ook goedgekeurd.

b.(10) Geef de oplossing van het beginwaardeprobleem

$$4ty + 3y^4 + (2t^2 + 5ty^3) \frac{dy}{dt} = 0, \quad y(-2) = 1. \quad (2)$$

Hint: vind een integrerende factor van de vorm $\phi(t, y) = t^\alpha y^\beta$.

De bovenstaande DV is niet exact want $\frac{\partial(4ty+3y^4)}{\partial y} = 4t + 12y^3 \neq \frac{\partial(2t^2+5ty^3)}{\partial t} = 4t + 5y^3$. Een integrerende factor wordt gevonden door te vermenigvuldigen met $\phi(t, y) = t^\alpha y^\beta$. Je krijgt dan:

$$\frac{\partial[t^\alpha y^\beta(4ty + 3y^4)]}{\partial y} = 4t^{\alpha+1}y^\beta(\beta + 1) + 3y^{3+\beta}(4 + \beta)t^\alpha$$

$$\frac{\partial[t^\alpha y^\beta(2t^2 + 5ty^3)]}{\partial t} = 2(2 + \alpha)t^{1+\alpha}y^\beta + y^{3+\beta}5(\alpha + 1)t^\alpha$$

Door gelijke machten gelijk te stellen volgt direct $\alpha = 2\beta$ en $5(\alpha + 1) = 12 + 3\beta$. Dit stelsel heeft als oplossing $\alpha = 2, \beta = 1$. De nieuwe DV kan men oplossen door de oplossing te schrijven als $E(t, y) = \text{const}$.

$$\frac{d}{dt}E(t, y(t)) = \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial y} \frac{dy}{dt} = 0.$$

De vergelijkingen waaraan de constante van beweging E voldoet zijn

$$\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial t} &= t^2 y(4ty + 3y^4) \\ \frac{\partial E}{\partial y} &= t^2 y(2t^2 + 5ty^3)\end{aligned}\tag{3}$$

Integreren van de eerste vergelijking naar t geeft $E(t, y) = t^4 y^2 + t^3 y^5 + H(y)$. Dit invullen in de tweede vergelijking levert $H'(y) = 0$, dus H kan 0 worden gekozen. De constante wordt geabsorbeerd in const . De waarde van const wordt gevonden door het punt $(-2, 1)$ in te vullen. We vinden dan $\text{const} = 8$. De oplossingen worden dus impliciet gegeven door

$$t^4 y^2 + t^3 y^5 = 8.$$

2. De Hermite differentiaalvergelijking voor de functie $y = y(t)$ wordt gegeven door:

$$y'' - 2ty' + \alpha y = 0,\tag{4}$$

met α een reële parameter.

- a. (5) Vind de algemene oplossing van (4) in de vorm van een machtreeks $y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$, door een recurrente betrekking voor de coëfficiënten a_n af te leiden.

Invullen van de machtreeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ in (3) geeft

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)t^{n-2} - 2t \sum_{n=1}^{\infty} a_n n t^{n-1} + \alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n &= \\ \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}(n+2)(n+1)t^n - 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n n t^n + \alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n &= \\ \sum_{n=0}^{\infty} [a_{n+2}(n+2)(n+1) - (2n - \alpha)a_n] t^n &= 0.\end{aligned}$$

Hieruit kun je direct aflezen dat

$$a_{n+2} = \left[\frac{2n - \alpha}{(n+1)(n+2)} \right] a_n, \quad \text{voor alle } n \geq 0$$

Merk op dat de convergentiestraal van deze machtreeks ∞ is, dus de oplossing bestaat voor alle $t \in \mathbf{R}$.

- b. (5) Geef de convergentiestraal van de onder (a) gevonden machtreeks en laat zien dat de algemene oplossing $y(t)$ geschreven kan worden als $y(t) = a_0 y_1(t) + a_1 y_2(t)$ waarbij $y_1(t)$ een even en $y_2(t)$ een oneven functie van t is en a_0, a_1 willekeurige constanten zijn.

Merk op dat de convergentiestraal van deze machtreeks ∞ is, dus de oplossing bestaat voor alle $t \in \mathbf{R}$, want

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+2}}{a_n} \right| = 0. \quad (5)$$

Uit de gevonden recurrente betrekking volgt meteen dat a_2 wordt bepaald door a_0 en a_3 door a_1 . In het algemeen zijn de even machten met elkaar verbonden door de relatie

$$a_{2k+2} = \left[\frac{4k - \alpha}{(2k+1)(2k+2)} \right] a_{2k}, \quad \text{voor alle } k \geq 0. \quad (6)$$

De oneven-machten voldoen aan

$$a_{2k+3} = \left[\frac{4k+2-\alpha}{(2k+2)(2k+3)} \right] a_{2k+1}, \quad \text{voor alle } k \geq 0. \quad (7)$$

Daarom geldt

$$y_1(t) = a_0 \left(1 - t^2 \frac{\alpha}{2!} + t^4 (4 - \alpha)(-\alpha)/4! + \dots \right) \quad (8)$$

en

$$y_2(t) = a_1 \left(t - t^3 \frac{(2-\alpha)}{3!} + t^5 (2-\alpha)(6-\alpha)/5! + \dots \right). \quad (9)$$

Omdat de twee oplossingen lineair onafhankelijk zijn, immers $y_1(t) = y_1(-t)$ and $y_2(t) = -y_2(-t)$, dus kunnen geen veelvoud van elkaar zijn, is de algemene oplossing van de gevraagde vorm.

Laat nu $\alpha = 2m$ met m een natuurlijk getal.

- c. (5) Laat zien dat in dit geval één van de machtreeksen $y_1(t)$ of $y_2(t)$ afbreekt.

Uit (6) volgt meteen dat als m een even getal dat dan de reeks met de even machten van t afbreekt, want voor zekere gehele $k = k^*$ zal $k^* = m/2$ zijn en voor alle gehele $k \geq k^*$ is $a_{2k+2} = 0$. Voor oneven m volgt dat voor zekere gehele $k = k^*$ met $k^* = (m-1)/2$, $a_{2k^*+1} = 0$. In dit geval breekt dus de reeks met oneven machten af.

- d. (5) Toon aan dat als $H_m(t)$ een oplossing is van (4) met $\alpha = 2m$, dat dan

$$H_{m+1}(t) := 2tH_m(t) - \frac{dH_m(t)}{dt},$$

een oplossing definieert die voldoet aan (4) met $\alpha = 2(m+1)$.

Door de definitie van H_{m+1} te gebruiken vinden we:

$$H''_{m+1} - 2tH'_{m+1} = (2tH_m - H'_m)'' - 2t(2tH_m - H'_m)' = (2tH'_m + 2H_m - H''_m)' - 2t(2tH_m - H'_m)'.$$

We kunnen H''_m verder vereenvoudigen door te gebruiken dat $H''_m - 2tH_m + 2mH_m = 0$. Dit geeft dat

$$\begin{aligned} H''_{m+1} - 2tH'_{m+1} &= (2mH_m + 2mH_m)' - 2t(2H_m - 2tH'_m - H''_m) \\ &= H'_m 2(m+1) - 4tH_m - 4t^2 H'_m + 2tH''_m \\ &= 2t(H''_m - 2tH_m H'_m + 2mH_m) - 4mtH_m - 4tH_m + H'_m 2(m+1) \\ &= -2(m+1)(2tH_m - H'_m) = -2(m+1)H_{m+1}. \end{aligned}$$

3. Zij A een reële $n \times n$ matrix, die voldoet aan $A^2 = -A$.

a.(10) Bewijs dat $\exp(At) = I - (e^{-t} - 1)A$, waarbij I de $n \times n$ -eenheidsmatrix is.

De definitie van $e^{At} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n t^n}{n!}$. Als de matrix A voldoet aan $A^2 = -A$, dan kan bijvoorbeeld door volledige inductie worden aangetoond dat $A^n = (-1)^{n+1}A$ voor alle natuurlijke $n > 0$. Dit gebruiken we om te schrijven

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n t^n}{n!} &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n t^n}{n!} A + I \\ &= \left(I - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^n}{n!} \right) A + I \\ &= (1 - e^{-t}) A + I \end{aligned} \tag{10}$$

b. (5) Bereken (bijv. met behulp van 3(a)) e^{At} voor $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

Deze matrix voldoet aan $A^2 = -A$. En je vindt dat

$$e^{At} = I + (1 - e^{-t}) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 - e^{-t} & 1 - e^{-t} \\ 1 - e^{-t} & 1 & 1 - e^{-t} \\ -1 + e^{-t} & -1 + e^{-t} & 2e^{-t} - 1 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

4. Gegeven is het volgende niet-lineaire stelsel in $\mathbf{R}^2$:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + x_1^2 \end{aligned} \tag{12}$$

a. (5) Vind alle reële evenwichtspunten van het stelsel (13).

Evenwichtspunten vinden we door $x_2 = 0$ en $x_1(-1 + x_1) = 0$ op te lossen. Dit geeft $(0, 0)$ en $(1, 0)$.

- b.(10) Lineariseer (13) rond de onder (a) gevonden evenwichtspunten en bepaal de stabiliteit (stabiel/instabiel/asymptotisch stabiel) van elk van de evenwichtspunten in het gelin-eariseerde stelsel en geef aan of het een knoop, zadel, focus of centrum betreft. Wat kun je zeggen over de stabiliteit van de evenwichtspunten voor het niet-lineaire stelsel (13) ?

De Jacobimatrix J is gelijk aan

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 + 2x_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Dit levert de eigenwaarden $\lambda = \pm i$ in $(0,0)$ en $\lambda = \pm 1$ in het punt $(1,0)$. Het punt $(0,0)$ is dus een *centrum*. Periodieke banen om $(0,0)$ zijn per definitie stabiel. Het punt $(1,0)$ is een zadelpunt en is per definitie instabiel.

Van het gedrag van het niet-lineaire stelsel kan niets worden gezegd in het geval de eigenwaarden reëel deel 0 hebben. Dus hoe het centrum eruit komt te zien in het niet lineaire stelsel is onbekend. Een zadel blijft een zadel.

- c. (5) Geef een impliciete uitdrukking voor de banen van (13).

De DV voor de banen luidt:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{-x_1 + x_1^2}{x_2}.$$

Deze separabele DV heeft als oplossingen:

$$x_1^2 + x_2^2 - \frac{2x_1^3}{3} = 2K$$

, met $K \in \mathbf{R}$ een constante.

- d. (5) Toon aan dat (13) periodieke oplossingen heeft.

Je moet aantonen dat er gesloten banen bestaan. Een kandidaat voor periodieke oplossingen zijn natuurlijk banen rond het punt $(0,0)$. De banen die gegeven worden door

$$x_1^2 + x_2^2 - \frac{2x_1^3}{3} = 2K,$$

zijn invariant onder spiegeling in de x_1 -as. Er bestaan steeds twee snijpunten met de x_2 -as, nl. $x_2 = \pm\sqrt{2K}$ (stel $x_1 = 0$), als $K > 0$ ($K = 0$ geeft $x_2 = 0$). Om ook twee snijpunten te hebben met de x_1 -as moet

$$x_1^2 - \frac{2x_1^3}{3} = 2K,$$

tenminste twee oplossingen hebben. Wanneer je de functie $g(x) = x^2 - \frac{2x^3}{3}$ nader beschouwt zie je dat er een maximum van $1/3$ zit in $x = 1$ en een minimum 0 in $x = 0$. Dus om drie oplossingen te hebben moet gelden $0 \leq K \leq 1/6$. De twee oplossingen dicht bij 0 corresponderen met de gesloten baan en de nader met een hyperbolische baan; zie ook vraag (e) Je kunt ook redeneren dat voor $|x_1| \ll 1$ de x_1^3 term veel kleiner is dan de x_1^2 -term en er dus bij benadering weer cirkelachtige banen zijn voldoende dicht bij $(0,0)$.

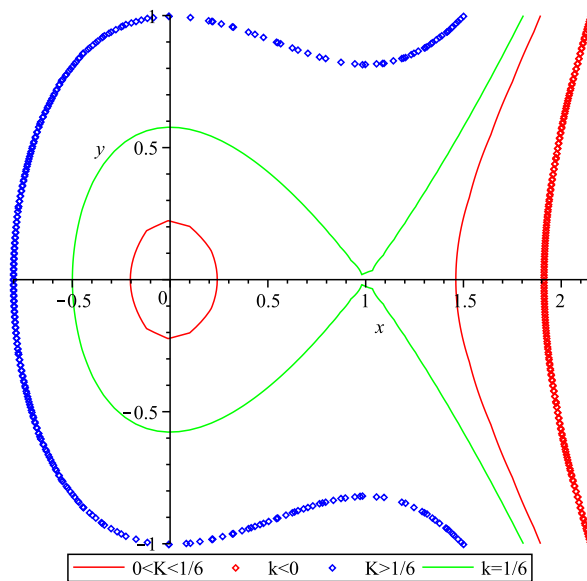


Figure 1: De banen geschetst met Maple. Voor $0 \leq K \leq 1/6$ zijn er gesloten banen in alle andere gevallen zijn de banen niet gesloten. Het geval $K = 1/6$ correspondeert met een connectie tussen de stabile en instabiele tak van het zadelpunt.

e. (5) Schets het faseportret behorend bij (13).

5. Beschouw de oplossing $y : I \rightarrow \mathbf{R}$ van onderstaand beginwaardeprobleem (15) gedefinieerd op een interval $I \subset \mathbf{R}$.

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\cos t}{4 - \sin^2 t} (4 - y^2), \quad y(0) = 1. \quad (14)$$

a. (5) Is het mogelijk dat de oplossing y van bovenstaand beginwaardeprobleem (15) voor zekere $t_1 \in I$ voldoet aan $y(t_1) = 2$?

Hint: gebruik de existentie- en eenduidigheidsstelling.

De functie

$$f(y, t) = \frac{\cos t}{4 - \sin^2 t} (4 - y^2),$$

is continu voor elke (t, y) en $\frac{\partial f}{\partial y}$ is ook continu voor elke (t, y) , dus het beginwaardeprobleem (15) heeft lokaal een unieke oplossing. Omdat $f(2, y) = 0$ is, voldoet de functie $y_c \mapsto 2$ aan de DV. Neem nu aan dat de oplossing van het beginwaardeprobleem $y(t)$ voldoet aan $y(t_1) = 2$ voor zeker $t_1 \in I$, dan heeft (15) twee verschillende oplossingen y_c en y (De oplossingskrommen snijden elkaar). Dit is tegenspraak met de existentie- en eenduidigheidsstelling, dus $y(t_1) \neq 2$ voor alle $t_1 \in I$.

b. (5) Laat zien dat voor de oplossing van het beginwaardeprobleem geldt dat $y(t) \neq \sin t$ voor alle $t \in I$.

De redenering is analoog aan die in onderdeel (a). De functie $y_2 : t \mapsto \sin t$ is een oplossing van de DV. Als nu de oplossing van het beginwaardeprobleem y , ergens gelijk is aan $\sin(t)$ dan zou gelden $y(t_2) = \sin(t_2)$ voor zeker $t_2 \in I$. Dit kan echter niet, want y is een andere oplossing dan y_2 , omdat $y_2(0) = 0$, terwijl $y(0) = 1$. Dus $y(t) \neq \sin(t)$ voor alle $t \in I$.

- c. (5) Beargumenteer dat uit (5a) en (5b) volgt dat de oplossing van (15) bestaat voor alle $t \in \mathbf{R}$.

De oplossing van (15) wordt van onder begrensd door $\sin(t)$ en van boven door $y = 2$, want $0 < y(0) = 1 < 2$. De enige reden waarom I niet de gehele $\mathbf{R}$ zou kunnen zijn is dat de oplossing in eindige tijd 'opblaast'. Wegens de begrenzing van boven en beneden kan dit echter nooit gebeuren, dus $I = \mathbf{R}$.